

Cohomologie étale: les points de départ.

par P. Deligne, rédigé par J.F. Boutot.

Ce travail reprend 6 exposés donnés par P. Deligne à Arcata en août 1974 (AMS Summer School on algebraic geometry), sous le titre: "Inputs of étale cohomology". Un 7^e exposé est devenu le "rapport sur la formule des traces", dans ce même volume. Le but des exposés était de donner les démonstrations des théorèmes fondamentaux en cohomologie étale, débarassées de la gangue de non-sense qui les entoure dans SGA 4. Nous n'avons pas cherché à énoncer les théorèmes sous leur forme la plus générale, ni à suivre les dévissages, parfois astucieux, que leur démonstration requiert. Nous avons au contraire mis l'accent sur les cas "irréductibles", qui, tous dévissages faits, restent à traiter.

Nous espérons que ce texte, qui ne prétend à aucune originalité, aidera le lecteur à consulter avec profit les 3 volumes de SGA 4.

Convention. Nous ne considérerons que des schémas quasi-compacts (= réunion finie d'ouverts affines) et quasi-séparés (= tels que l'intersection de deux ouverts affines est quasi-compacte), et les appellerons simplement schémas.

Table des matières

I. Topologies de Grothendieck		6
	1. Cribles	I-1
	2. Faisceaux	I-2
	3. Champs	I-2
	4. Descente fidèlement plate.	I-4
	5. Un cas particulier: le théorème 90 de Hilbert.	I-8
	6. Topologies de Grothendieck	I-10
II. Topologie étale		18
	1. Topologie étale	II-1
	2. Exemples de faisceaux	II-2
	3. Fibres, images directes	II-5
	4. Cohomologie galoisienne	II-7
III. Cohomologie des courbes.		27
	1. Le groupe de Brauer	III-1
	2. Le théorème de Tsen	III-4
	3. Cohomologie des courbes lisses	III-6
	4. Dévissages	III-10
IV. Théorème de changement de base pour un morphisme propre		39
	1. Introduction	IV-1
	2. Démonstration pour $q=0$ ou 1 et $F = \mathbb{Z}/n$	IV-2
	3. Faisceaux constructibles	IV-5
	4. Fin de la démonstration	IV-7
	5. Cohomologie à support propre.	IV-9
	6. Applications	IV-12
V. Acyclicité locale des morphismes lisses		52
	1. Morphismes localement acycliques	V-3
	2. Acyclicité locale d'un morphisme lisse	V-7
	3. Applications	V-11
VI. Dualité de Poincaré		66
	1. Introduction	VI-1
	2. Le cas de courbes	VI-3
	3. Le cas général	VI-5
	4. Variantes et applications	VI-7
Bibliographie		74

I. Topologies de Grothendieck.

A l'origine, les topologies de Grothendieck sont apparues comme sous-jacentes à sa théorie de la descente (cf SGA 1 VI, VIII); l'usage des théories de cohomologie correspondantes est plus tardif. La même démarche est suivie ici: en formalisant les notions classiques de localisation, de propriété locale et de recollement (§ 1, 2, 3), on dégage le concept général de topologie de Grothendieck (§ 6); pour en justifier l'introduction en géométrie algébrique, on démontre un théorème de descente fidèlement plate (§ 4), généralisation du classique théorème 90 de Hilbert (§ 5).

Le lecteur trouvera une exposition plus complète, mais concise, du formalisme dans Giraud [5]. Les notes de M. Artin: "Grothendieck topologies" [1] (chapitres I à III) restent également utiles. Les 866 pages des exposés I à VI de SGA 4 sont précieuses lorsqu'on considère des topologies exotiques, telle celle qui donne naissance à la cohomologie cristalline; pour utiliser la topologie étale, si proche de l'intuition classique, il n'est pas indispensable de les lire.

1. Cribles. Soient X un espace topologique et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles sur X . La continuité de f est une propriété de nature locale; autrement dit, si f est continue sur tout ouvert suffisamment petit de X , f est continue sur X tout entier. Pour formaliser la notion de "propriété de nature locale", nous introduirons quelques définitions.

On dit qu'un ensemble \mathcal{U} d'ouverts de X est un crible si pour tout $U \in \mathcal{U}$ et $V \subset U$, on a $V \in \mathcal{U}$. On dit qu'un crible est couvrant si la réunion de tous les ouverts appartenant à ce crible est égale à X .

Etant donnée une famille $\{U_i\}$ d'ouverts de X , le crible engendré par $\{U_i\}$ est par définition l'ensemble des ouverts U de X tels que U soit contenu dans l'un des U_i .

On dit qu'une propriété $P(U)$, définie pour tout ouvert U de X , est locale si, pour tout crible couvrant \underline{u} de tout ouvert U de X , $P(U)$ est vraie si et seulement si $P(V)$ est vraie pour tout $V \in \underline{u}$. Par exemple, étant donné $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, la propriété " f est continue sur U " est locale.

2. Faisceaux. Précisons la notion de fonction donnée localement sur X .

(2.1) Point de vue des cribles: Soit \underline{u} un crible d'ouverts de X . On appelle fonction donnée \underline{u} -localement sur X la donnée pour tout $U \in \underline{u}$ d'une fonction f_U sur U telle que, si $V \subset U$, on ait $f_V = f_U|_V$.

(2.2) Point de vue de Čech: Si le crible \underline{u} est engendré par une famille d'ouverts U_i de X , se donner une fonction \underline{u} -localement revient à se donner une fonction f_i sur chaque U_i telle que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$.

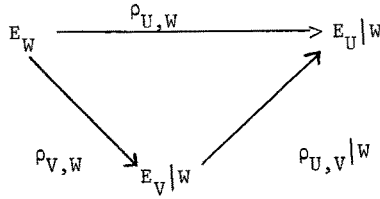
Autrement dit, si $Z = \coprod U_i$, se donner une fonction \underline{u} -localement revient à se donner une fonction sur Z qui soit constante sur les fibres de la projection naturelle $Z \rightarrow X$.

(2.3) Les fonctions continues forment un faisceau; cela signifie que pour tout crible couvrant \underline{u} d'un ouvert V de X et toute fonction donnée \underline{u} -localement $\{f_U\}$ telle que chaque f_U soit continue sur U , il existe une unique fonction continue f sur V telle que $f|_U = f_U$ pour tout $U \in \underline{u}$.

3. Champs. Précisons maintenant la notion de fibré vectoriel donné localement sur X .

(3.1) Point de vue des cribles: Soit \underline{u} un crible d'ouverts de X . On appelle fibré vectoriel donné \underline{u} -localement sur X les données de

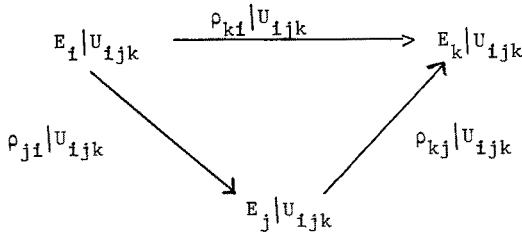
- a) un fibré vectoriel E_U sur chaque $U \in \underline{u}$,
- b) si $V \subset U$, un isomorphisme $\rho_{U,V} : E_V \xrightarrow{\sim} E_U|_V$, vérifiant
- c) si $W \subset V \subset U$, le diagramme



commute, c'est-à-dire $\rho_{U,W} = (\rho_{U,V} \text{ restreint à } W) \circ \rho_{V,W}$.

(3.2) Point de vue de Čech: Si le crible \underline{u} est engendré par une famille d'ouverts U_i de X , se donner un fibré vectoriel \underline{u} -localement revient à se donner:

- a) un fibré vectoriel E_i sur chaque U_i ,
- b) si $U_{ij} = U_i \cap U_j = U_i \times_X U_j$, un isomorphisme $\rho_{ji} : E_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} E_j|_{U_{ij}}$, de sorte que
- c) si $U_{ijk} = U_i \times_X U_j \times_X U_k$, le diagramme



commute, c'est-à-dire $\rho_{ki} = \rho_{kj} \circ \rho_{ji}$ sur U_{ijk} .

Autrement dit, si $Z = \bigsqcup U_i$ et si $\pi : Z \rightarrow X$ est la projection naturelle, se donner un fibré vectoriel \underline{u} -localement revient à se donner:

- a) un fibré vectoriel E sur Z ,
- b) si x et y sont deux points de Z tels que $\pi(x) = \pi(y)$, un

isomorphisme $\rho_{yx} : E_x \xrightarrow{\sim} E_y$ entre les fibres de E en x et en y , dépendant continûment de (x, y) et tel que,

c) si x, y et z sont trois points de Z tels que $\pi(x) = \pi(y) = \pi(z)$, on ait $\rho_{zx} = \rho_{zy} \circ \rho_{yx}$.

(3,3) Un fibré vectoriel E sur X définit un fibré vectoriel donné \underline{u} -localement $E_{\underline{u}}$: le système des restrictions E_U de E aux objets de \underline{u} . Le fait que la notion de fibré vectoriel est de nature locale peut s'exprimer ainsi: pour tout crible couvrant \underline{u} de X , le foncteur $E \mapsto E_{\underline{u}}$, des fibrés vectoriels sur X dans les fibrés vectoriels donnés \underline{u} -localement, est une équivalence de catégories.

(3,4) Si dans 1. on remplace "ouvert de X " par "partie de X ", on obtient la notion de crible de sous-espaces de X . Dans ce cadre aussi on dispose de théorèmes de recollement. Par exemple: soient X un espace normal et \underline{C} un crible de sous-espaces de X engendré par un recouvrement fermé localement fini de X , alors le foncteur $E \mapsto E_{\underline{C}}$, des fibrés vectoriels sur X dans les fibrés vectoriels donnés \underline{C} -localement est une équivalence de catégories.

En géométrie algébrique, il est utile de considérer aussi des "cribles d'espaces au-dessus de X "; c'est ce que nous verrons au paragraphe suivant.

4. Descente fidèlement plate.

(4,1) Dans le cadre des schémas, la topologie de Zariski n'est pas assez fine pour l'étude des problèmes non linéaires et on est amené à remplacer dans les définitions précédentes les immersions ouvertes par des morphismes plus généraux.

De ce point de vue, les techniques de descente apparaissent comme des techniques de localisation. Ainsi l'énoncé de descente suivant peut s'exprimer en disant que les propriétés considérées sont de nature locale pour la topologie fidèlement plate [On dit qu'un morphisme de schémas est fidèlement plat s'il est plat et surjectif].

Proposition (4.2). Soient A un anneau et B une A -algèbre fidèlement plate.

Alors:

(i) Une suite $\Sigma = (M' \rightarrow M \rightarrow M'')$ de A -modules est exacte dès que la suite $\Sigma_{(B)}$ qui s'en déduit par extension des scalaires à B est exacte.

(ii) Un A -module M est de type fini (resp. de présentation finie, plat, localement libre de rang fini, inversible (i.e. localement libre de rang un)) dès que le B -module $M_{(B)}$ l'est.

Démonstration: (i) Le foncteur $M \mapsto M_{(B)}$ étant exact (platitude de B), il suffit de montrer que, si un A -module N est non nul, $N_{(B)}$ est non nul. Si N est non nul, N contient un sous-module monogène non nul A/\underline{a} ; alors $N_{(B)}$ contient un sous-module monogène $(A/\underline{a})_{(B)} = B/\underline{a}B$, non nul par surjectivité du morphisme structural $\varphi : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ [si $V(\underline{a})$ est non vide, $\varphi^{-1}(V(\underline{a})) = V(\underline{a}B)$ est non vide].

(ii) Pour toute famille (x_i) d'éléments de $M_{(B)}$, il existe un sous-module de type fini M' de M tel que $M'_{(B)}$ contienne les x_i . Si $M_{(B)}$ est de type fini et si les x_i engendrent $M_{(B)}$, on a $M'_{(B)} = M_{(B)}$, donc $M' = M$ et M est de type fini.

Si $M_{(B)}$ est de présentation finie, on peut, d'après ce qui précède, trouver une surjection $A^n \rightarrow M$. Si N est le noyau de cette surjection, le B -module $N_{(B)}$ est de type fini, donc N l'est, et M est de présentation finie. L'assertion pour "plat" résulte aussitôt de (i); "localement libre de rang fini" signifie "plat et de présentation finie" et le rang se teste par extension des scalaires à des corps.

(4.3) Soient X un schéma et $\underline{\mathcal{S}}$ une classe de X -schémas stable par produit fibré sur X . Une classe $\underline{\mathcal{U}} \subset \underline{\mathcal{S}}$ est un crible sur X (relativement à $\underline{\mathcal{S}}$) si, pour tout morphisme $\varphi : V \rightarrow U$ de X -schémas, avec $U, V \in \underline{\mathcal{S}}$ et $U \in \underline{\mathcal{U}}$, on a $V \in \underline{\mathcal{U}}$. Le crible engendré par une famille $\{U_i\}$ de X -schémas dans $\underline{\mathcal{S}}$ est la classe des $V \in \underline{\mathcal{S}}$ tels qu'il existe un morphisme de X -schémas de V dans l'un des U_i .

(4.4) Soit $\underline{\mathcal{U}}$ un crible sur X . On appelle module quasi-cohérent donné $\underline{\mathcal{U}}$ -localement sur X la donnée de

- a) un module quasi-cohérent E_U sur chaque $U \in \underline{\mathcal{U}}$,
- b) pour tout $U \in \underline{\mathcal{U}}$ et pour tout morphisme $\varphi : V \rightarrow U$ de X -schémas dans $\underline{\mathcal{S}}$, un isomorphisme $\rho_\varphi : E_V \xrightarrow{\sim} \varphi^* E_U$, ceux-ci étant tels que
- c) si $\psi : W \rightarrow V$ est un morphisme de X -schémas dans $\underline{\mathcal{S}}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E_W & \xrightarrow{\rho_{\varphi \circ \psi}} & \psi^* \varphi^* E_U \\
 \rho_\psi \searrow & & \nearrow \psi^* \rho_\varphi \\
 & \psi^* E_V &
 \end{array}$$

commute, c'est-à-dire $\rho_{\varphi \circ \psi} = (\psi^* \rho_\varphi) \circ \rho_\psi$.

Si E est un module quasi-cohérent sur X , on note $E_{\underline{\mathcal{U}}}$ le module donné $\underline{\mathcal{U}}$ -localement valant $\varphi_U^* E$ sur $\varphi_U : U \rightarrow X$ et tel que, pour tout morphisme $\psi : V \rightarrow U$ l'isomorphisme de restriction ρ_ψ soit l'isomorphisme canonique $E_V = (\varphi_U \circ \psi)^* E \xrightarrow{\sim} \psi^* \varphi_U^* E = \psi^* E_U$.

Théorème (4.5) - Soit $\{U_i\} \in \underline{\mathcal{S}}$ une famille finie de X -schémas plats sur X telle que X soit la réunion des images des U_i , et soit $\underline{\mathcal{U}}$ le crible engendré par $\{U_i\}$. Alors le foncteur $E \mapsto E_{\underline{\mathcal{U}}}$ est une équivalence de la catégorie des modules quasi-cohérents sur X avec la catégorie des modules quasi-cohérents donnés $\underline{\mathcal{U}}$ -localement.

Démonstration: Nous ne traiterons que le cas où X est affine et où \underline{U} est engendré par un X -schéma affine U , fidèlement plat sur X . La réduction à ce cas est formelle. On pose $X = \text{Spec}(A)$ et $U = \text{Spec}(B)$.

Si le morphisme $U \rightarrow X$ admet une section, X appartient au crible \underline{U} et l'assertion est évidente. Nous nous réduirons à ce cas.

Un module quasi-cohérent donné \underline{U} -localement définit des modules M', M'' et M''' sur $U, U \times_X U$ et $U \times_X U \times_X U$, et des isomorphismes $\rho : p^* M' \simeq M''$ pour tout morphisme de projection p entre ces espaces; c'est là un diagramme cartésien

$$M^* : M' \rightrightarrows M'' \rightrightarrows M'''$$

au-dessus de

$$U_* : U \rightrightarrows U \times_X U \rightrightarrows U \times_X U \times_X U .$$

Réciproquement M^* détermine le module donné \underline{U} -localement: pour $V \in \underline{U}$, il existe $\varphi : V \rightarrow U$ et on pose $M_U = \varphi^* M'$; pour $\varphi_1, \varphi_2 : V \rightarrow U$, on a une identification naturelle $\varphi_1^* M' \simeq (\varphi_1 \times \varphi_2)^* M'' \simeq \varphi_2^* M'$, et on voit en utilisant M''' que ces identifications sont compatibles, de sorte que la définition est légitime. Bref, il revient au même de se donner un module \underline{U} -localement ou un diagramme M^* cartésien sur U_* .

Traduisons en termes algébriques: se donner M^* revient à se donner un diagramme cartésien de modules

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xrightarrow{\partial_0} & & \xrightarrow{\partial_0} & \\
 M' & \xrightarrow{\partial_1} & M'' & \xrightarrow{\partial_1} & M''' \\
 & \xrightarrow{\partial_2} & & \xrightarrow{\partial_2} &
 \end{array}$$

au-dessus du diagramme d'anneaux

$$\begin{array}{ccc}
 B & \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial_0} \\ \xrightarrow{\partial_1} \end{array} & B \otimes_A B \\
 & & \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial_0} \\ \xrightarrow{\partial_1} \\ \xrightarrow{\partial_2} \end{array} \\
 & & B \otimes_A B \otimes_A B
 \end{array}$$

[précisons: on a $\partial_1(bm) = \partial_1(b) \cdot \partial_1(m)$, les identités usuelles telles que

$\partial_0 \partial_1 = \partial_0 \partial_0$ sont vraies, et "cartésien" signifie que les morphismes

$\partial_1: M' \otimes_B \partial_1(B \otimes_A B) \rightarrow M''$ et $M'' \otimes_{B \otimes_A B, \partial_1} (B \otimes_A B \otimes_A B) \rightarrow M'''$ sont des isomorphismes].

Le foncteur $E \mapsto E_{\downarrow}$ devient le foncteur qui, à un A-module M , associe

$$M^* = (M \otimes_A B \rightrightarrows M \otimes_A B \otimes_A B \rightrightarrows M \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B) .$$

Il admet pour adjoint à droite le foncteur

$$(M' \rightrightarrows M'' \rightrightarrows M''') \mapsto \text{Ker}(M' \rightrightarrows M'') .$$

Il nous faut prouver que les flèches d'adjonction

$$M \rightarrow \text{Ker}(M \otimes_A B \rightrightarrows M \otimes_A B \otimes_A B)$$

et

$$\text{Ker}(M' \rightrightarrows M'') \otimes_A B \rightarrow M'$$

sont des isomorphismes. D'après (4.2)(i), il suffit de le prouver après un changement de base fidèlement plat $A \rightarrow A'$ (B devenant $B' = B \otimes_A A'$) . Prenant $A' = B$, ceci nous ramène au cas où $U \rightarrow X$ admet une section.

5. Un cas particulier: le théorème 90 de Hilbert.

(5.1) Soient k un corps, k' une extension galoisienne de k et $G = \text{Gal}(k'/k)$. Alors l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc}
 k' \otimes_k k' & \longrightarrow & \bigoplus_{\sigma \in G} k' \\
 x \otimes y & \longmapsto & \{x \cdot \sigma(y)\}_{\sigma \in G}
 \end{array}$$

est bijectif.

On en déduit qu'il revient au même de se donner un module localement pour le crible engendré par $\text{Spec}(k')$ sur $\text{Spec}(k)$ ou de se donner un k' -espace vectoriel muni d'une action semi-linéaire de G , c'est-à-dire:

a) un k' -espace vectoriel V' ,

b) pour tout $\sigma \in G$, un endomorphisme φ_σ de la structure de groupe de V' tel que $\varphi_\sigma(\lambda v) = \sigma(\lambda) \varphi_\sigma(v)$, pour tout $\lambda \in k'$ et $v \in V'$, vérifiant la condition

c) pour tout $\sigma, \tau \in G$, on a $\varphi_{\tau\sigma} = \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma$.

Soit $V = V'^G$ le groupe des invariants par cette action de G ; c'est un k -espace vectoriel et, d'après le théorème (4.5), on a:

Proposition (5.2). - L'inclusion de V dans V' définit un isomorphisme

$$V \otimes_k k' \xrightarrow{\sim} V'.$$

En particulier, si V' est de dimension 1 et si $v' \in V'$ est non nul, φ_σ est déterminé par la constante $c(\sigma) \in k'^*$ telle que $\varphi_\sigma(v') = c(\sigma) v'$ et la condition c) s'écrit

$$c(\tau\sigma) = c(\tau) \cdot \tau(c(\sigma)).$$

D'après la proposition il existe un vecteur invariant non nul $v = \mu v'$, $\mu \in k'^*$.

On a donc pour tout $\sigma \in G$,

$$c(\sigma) = \mu \cdot \sigma(\mu^{-1}).$$

Autrement dit tout 1-cocycle de G à valeurs dans k'^* est un cobord:

Corollaire (5.3) - On a $H^1(G, k'^*) = 0$.

6. Topologies de Grothendieck. Nous transcrivons maintenant les définitions des paragraphes précédents dans un cadre abstrait englobant à la fois le cas des espaces topologiques et celui des schémas.

(6.1) Soient $\underline{\mathcal{S}}$ une catégorie et U un objet de $\underline{\mathcal{S}}$. On appelle crible sur U un sous-ensemble $\underline{\mathcal{U}}$ de $\text{Ob}(\underline{\mathcal{S}}/U)$ tel que si $\varphi : V \rightarrow U$ appartient à $\underline{\mathcal{U}}$ et si $\psi : W \rightarrow V$ est un morphisme dans $\underline{\mathcal{S}}$, alors $\varphi \circ \psi : W \rightarrow U$ appartient à $\underline{\mathcal{U}}$.

Si $\{\varphi_i : U_i \rightarrow U\}$ est une famille de morphismes, le crible engendré par les U_i est par définition l'ensemble des morphismes $\varphi : V \rightarrow U$ qui se factorisent à travers l'un des φ_i .

Si $\underline{\mathcal{U}}$ est un crible sur U et si $\varphi : V \rightarrow U$ est un morphisme, la restriction $\underline{\mathcal{U}}_V$ de $\underline{\mathcal{U}}$ à V est par définition le crible sur V constitué par les morphismes $\psi : W \rightarrow V$ tels que $\varphi \circ \psi : W \rightarrow U$ appartienne à $\underline{\mathcal{U}}$.

(6.2) La donnée d'une topologie de Grothendieck sur $\underline{\mathcal{S}}$ consiste en la donnée pour tout objet U de $\underline{\mathcal{S}}$ d'un ensemble $C(U)$ de cribles sur U , dits cribles couvrants, de telle sorte que les axiomes suivants soient satisfaits:

- a) Le crible engendré par l'identité de U est couvrant.
- b) Si $\underline{\mathcal{U}}$ est un crible couvrant sur U et si $V \rightarrow U$ est un morphisme, le crible $\underline{\mathcal{U}}_V$ est couvrant.
- c) Un crible localement couvrant est couvrant. Autrement dit, si $\underline{\mathcal{U}}$ est un crible couvrant sur U et si $\underline{\mathcal{U}}'$ est un crible sur U tel que, pour tout $V \rightarrow U$ appartenant à $\underline{\mathcal{U}}$, le crible $\underline{\mathcal{U}}'_V$ est couvrant, alors $\underline{\mathcal{U}}'$ est couvrant.

On appelle site la donnée d'une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck.

(6.3) Etant donné un site $\underline{\mathcal{S}}$, on appelle préfaisceau sur $\underline{\mathcal{S}}$ un foncteur

contravariant \mathcal{F} de $\underline{\mathcal{S}}$ dans la catégorie des ensembles. Pour tout objet U de $\underline{\mathcal{S}}$, on appelle section de \mathcal{F} au-dessus de U les éléments de $\mathcal{F}(U)$. Pour tout morphisme $V \rightarrow U$ et pour tout $s \in \mathcal{F}(U)$, on note $s|_V$ (s restreint à V) l'image de s dans $\mathcal{F}(V)$.

Si $\underline{\mathcal{U}}$ est un crible sur U , on appelle section donnée $\underline{\mathcal{U}}$ -localement la donnée, pour tout $V \rightarrow U$ appartenant à $\underline{\mathcal{U}}$, d'une section $s_V \in \mathcal{F}(V)$ telle que, pour tout morphisme $W \rightarrow V$, on ait $s_V|_W = s_W$. On dit que \mathcal{F} est un faisceau si, pour tout objet U de $\underline{\mathcal{S}}$, pour tout crible couvrant $\underline{\mathcal{U}}$ sur U et pour toute section donnée $\underline{\mathcal{U}}$ -localement $\{s_V\}$, il existe une unique section $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s|_V = s_V$, pour tout $V \rightarrow U$ appartenant à $\underline{\mathcal{U}}$.

On définit de manière analogue les faisceaux abéliens en remplaçant la catégorie des ensembles par celle des groupes abéliens. On montre que la catégorie des faisceaux abéliens sur $\underline{\mathcal{S}}$ est une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs. Une suite $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ de faisceaux est exacte si, pour tout objet U de $\underline{\mathcal{S}}$ et pour tout $s \in \mathcal{G}(U)$ telle que $g(s) = 0$, il existe localement t tel que $f(t) = s$; i.e. s'il existe un crible couvrant $\underline{\mathcal{U}}$ sur U et pour tout $V \in \underline{\mathcal{U}}$, une section t_V de \mathcal{F} sur V telle que $f(t_V) = s|_V$.

(6.4) Exemples: Nous en avons vu deux plus haut.

a) Soient X un espace topologique et $\underline{\mathcal{S}}$ la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les morphismes les inclusions naturelles. La topologie de Grothendieck sur $\underline{\mathcal{S}}$ correspondant à la topologie usuelle de X est celle pour laquelle un crible $\underline{\mathcal{U}}$ sur un ouvert U de X est couvrant si la réunion des ouverts appartenant à ce crible est égale à U . Il est clair que la catégorie des faisceaux sur $\underline{\mathcal{S}}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux sur X au sens usuel.

b) Soient X un schéma et $\underline{\mathcal{S}}$ la catégorie des schémas sur X . On appelle

topologie fpqc (fidèlement plate quasi-compacte) sur \underline{S} la topologie de Grothendieck pour laquelle un crible sur un X-schéma U est couvrant s'il est engendré par une famille finie de morphismes plats dont les images recouvrent U .

(6.5) Cohomologie: On supposera toujours que la catégorie \underline{S} a un objet final X . Alors on appelle sections globales d'un faisceau abélien \mathcal{F} , et on note $\Gamma \mathcal{F}$ ou $H^0(X, \mathcal{F})$, le groupe $\mathcal{F}(X)$. Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma \mathcal{F}$ est un foncteur exact à gauche de la catégorie des faisceaux abéliens sur \underline{S} dans la catégorie des groupes abéliens , on note $H^i(X, \bullet)$ ses dérivés (ou satellites). Ces groupes de cohomologie représentent les obstructions à passer du local au global. Par définition, si $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux abéliens, on a une suite exacte longue de cohomologie:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

(6.5) Etant donné un faisceau abélien \mathcal{F} sur \underline{S} , on appelle \mathcal{F} -torseur un faisceau \mathcal{G} muni d'une action $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ de \mathcal{F} telle que localement (après restriction à tous les objets d'un crible couvrant l'objet final X) \mathcal{G} muni de l'action de \mathcal{F} soit isomorphe à \mathcal{F} muni de l'action canonique $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ par translations.

On peut montrer que $H^1(X, \mathcal{F})$ s'interprète comme l'ensemble des classes à isomorphisme près de \mathcal{F} -torseurs.

II. Topologie étale.

On spécialise les définitions du chapitre précédent au cas de la topologie étale d'un schéma X (§ 1, 2, 3). La cohomologie correspondante coïncide dans le cas où X est le spectre d'un corps K avec la cohomologie galoisienne de K (§ 4).

1. Topologie étale. Nous commencerons par quelques rappels sur la notion de morphisme étale.

Définition (1.1) - Soit A un anneau (commutatif). On dit qu'une A -algèbre B est étale si B est une A -algèbre de présentation finie et si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées:

a) Pour toute A -algèbre C et pour tout idéal de carré nul J de C , l'application canonique

$$\text{Hom}_{A\text{-alg}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-alg}}(B, C/J)$$

est une bijection.

b) B est un A -module plat et $\Omega_{B/A} = 0$ (on note $\Omega_{B/A}$ le module des différentielles relatives).

c) Soit $B = A[X_1, \dots, X_n]/I$ une présentation de B .

Alors pour tout idéal premier \mathfrak{r} de $A[X_1, \dots, X_n]$ contenant I , il existe des polynômes $P_1, \dots, P_n \in I$ tels que $I_{\mathfrak{r}}$ soit engendré par les images de P_1, \dots, P_n et $\det(\partial P_i / \partial X_j) \notin \mathfrak{r}$.

[cf. SGA 1, exposé I ou M. RAYNAUD, Anneaux Locaux Henséliens, chapitre V].

On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est étale si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ de $f(x)$ et un voisinage ouvert affine $V = \text{Spec}(B)$ de x dans $X \times_S U$ tel que B soit une A -algèbre étale.

(1.2) Exemples: a) Si A est un corps, une A -algèbre B est étale si et seulement si c'est un produit fini d'extensions séparables de A .

b) Si X et S sont des schémas de type fini sur \mathbb{C} , un morphisme $f : X \rightarrow S$ est étale si et seulement si son analytifié $f^{\text{an}} : X^{\text{an}} \rightarrow S^{\text{an}}$ est un isomorphisme local.

Sortie (1.3) - a) (changement de base) Si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme étale, il en est de même de $f_{S'} : X \times_S S' \rightarrow S'$ pour tout morphisme $S' \rightarrow S$.

b) (composition) Le composé de deux morphismes étales est un morphisme étale.

c) Si $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ sont deux morphismes étales, tout S -morphisme de X dans Y est étale.

d) (descente) Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme. S'il existe un morphisme fidèlement plat $S' \rightarrow S$, tel que $f_{S'} : X \times_S S' \rightarrow S'$ soit étale, alors f est étale.

(1.4) Soit X un schéma. Soit $\underline{\mathcal{S}}$ la catégorie des X -schémas étales; d'après (1.3,c) tout morphisme de $\underline{\mathcal{S}}$ est un morphisme étale. On appelle topologie étale sur $\underline{\mathcal{S}}$ la topologie pour laquelle un crible sur U est couvrant s'il est engendré par une famille finie de morphismes $\varphi_i : U_i \rightarrow U$ tels que la réunion des images des φ_i recouvre U . On appelle site étale de X , et on note $X_{\text{ét}}$, le site défini par $\underline{\mathcal{S}}$ muni de la topologie étale.

2. Exemples de faisceaux.

(2.1) Faisceau constant: Soit C un groupe abélien et supposons pour simplifier X noethérien. On notera \underline{C}_X (ou même C s'il n'y a pas d'ambiguïté) le faisceau défini par $U \mapsto C^{\pi_0(U)}$, où $\pi_0(U)$ est l'ensemble (fini) des composantes connexes de U . Le cas le plus important sera $C = \mathbb{Z}/n$. On a donc par définition

$$H^0(X, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n^{\pi_0(X)}.$$

De plus $H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de \mathbb{Z}/n -torseurs (I.6.5), autrement dit de revêtements étales galoisiens de X de groupe \mathbb{Z}/n . En particulier, si X est connexe et si $\pi_1(X)$ est son groupe fondamental pour un point base choisi, on a

$$H^1(X, \mathbb{Z}/n) = \text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}/n) .$$

(2.2) Groupe multiplicatif: On notera $\mathbb{G}_{m,X}$ (ou \mathbb{G}_m s'il n'y a pas d'ambiguïté) le faisceau défini par $U \rightarrow \Gamma(U, \underline{O}_U^*)$; il s'agit bien d'un faisceau grâce au théorème de descente fidèlement plate (I.4.5). On a par définition

$$H^0(X, \mathbb{G}_m) = H^0(X, \underline{O}_X^*)^* ;$$

en particulier si X est réduit, connexe et propre sur un corps algébriquement clos k , on a:

$$H^0(X, \mathbb{G}_m) = k^* .$$

Proposition (2.3) - On a un isomorphisme:

$$H^1(X, \mathbb{G}_m) = \text{Pic}(X) ,$$

où $\text{Pic}(X)$ est le groupe des classes de faisceaux inversibles sur X .

Démonstration: Soit $*$ le foncteur qui, à un faisceau inversible \mathcal{L} sur X , associe le préfaisceau \mathcal{L}^* suivant sur $X_{\text{ét}}$: pour $\varphi: U \rightarrow X$ étale,

$$\mathcal{L}^*(U) = \text{Isom}_U(\underline{O}_U, \varphi^* \mathcal{L}) .$$

D'après (4.2) (i) et (4.5) (pleine fidélité), ce préfaisceau est un faisceau; c'est même un \mathbb{G}_m -torseur. On vérifie aussitôt que

a) le foncteur $*$ est compatible à la localisation (étale);

b) il induit une équivalence de la catégorie des faisceaux inversibles triviaux (i.e. isomorphes à \underline{O}_X) avec la catégorie des \mathbb{G}_m -torseurs triviaux: \mathcal{L} est trivial si et seulement si \mathcal{L}^* l'est.

De plus, d'après (4.2) (ii) et (4.5),

c) la notion de faisceau inversible est locale pour la topologie étale.

Il résulte formellement de a), b), c) que $*$ est une équivalence entre la catégorie des faisceaux inversibles sur X et celle des \mathbb{G}_m -torseurs sur $X_{\text{ét}}$; elle induit l'isomorphisme cherché. On construit comme suit l'équivalence inverse: si T est un \mathbb{G}_m -torseur, il existe un recouvrement étale fini $\{U_i\}$ de X tel que les toseurs $T|_{U_i}$ soient triviaux; T est alors trivial sur chaque V étale sur X appartenant au crible $\underline{u} \subset X_{\text{ét}}$ engendré par $\{U_i\}$. Sur chaque $V \in \underline{u}$, $T|_V$ correspond à un faisceau inversible \mathcal{L}_V (par b)) et les \mathcal{L}_V constituent un faisceau inversible donné \underline{u} -localement $\mathcal{L}_{\underline{u}}$ (par a)). Par c), ce dernier provient d'un faisceau inversible $\mathcal{L}(T)$ sur X , et $T \mapsto \mathcal{L}(T)$ est l'inverse cherché de $*$.

(2.4) Racines de l'unité: Pour tout entier $n > 0$, on appelle faisceau des racines n -ièmes de l'unité, et on note μ_n , le noyau de l'élévation à la puissance n -ième dans \mathbb{G}_m . Si X est un schéma sur un corps séparablement clos k et si n est inversible dans k , le choix d'une racine primitive n -ième de l'unité $\xi \in k$ définit un isomorphisme $i \mapsto \xi^i$ de \mathbb{Z}/n avec μ_n .

La relation entre cohomologie à coefficients dans μ_n et cohomologie à coefficients dans \mathbb{G}_m est donnée par la suite exacte de cohomologie déduite de la

(2.5) Théorie de Kummer. - Si n est inversible sur X , l'élévation à la puissance n -ième dans \mathbb{G}_m est un épimorphisme de faisceaux. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 0.$$

Démonstration: Soient $U \rightarrow X$ un morphisme étale et $a \in G_m^*(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$. Puisque n est inversible sur U , l'équation $T^n - a = 0$ est séparable; autrement dit $U' = \text{Spec } \mathcal{O}_U[T]/(T^n - a)$ est étale au-dessus de U . Par ailleurs $U' \rightarrow U$ est surjectif et a admet une racine n -ième sur U' , d'où le résultat.

3. Fibres, images directes.

(3.1) On appelle point géométrique de X un morphisme $\bar{x} \rightarrow X$, où \bar{x} est le spectre d'un corps séparablement clos $k(\bar{x})$. On le notera abusivement \bar{x} , sous-entendant le morphisme $\bar{x} \rightarrow X$. Si x est l'image de \bar{x} dans X , on dit que \bar{x} est centré en x . Si le corps $k(\bar{x})$ est une extension algébrique du corps résiduel $k(x)$, on dit que \bar{x} est un point géométrique algébrique de X .

On appelle voisinage étale de \bar{x} un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow & \downarrow \\ \bar{x} & \longrightarrow & X \end{array}, \text{ où } U \rightarrow X \text{ est un morphisme étale.}$$

Le localisé strict de X en \bar{x} est l'anneau $O_{X, \bar{x}} = \varinjlim \Gamma(U, O_U)$, la limite inductive étant prise sur les voisinages étales de \bar{x} . C'est un anneau local strictement hensélien dont le corps résiduel est la clôture séparable du corps résiduel $k(x)$ de X en x dans $k(\bar{x})$. Il joue le rôle d'anneau local pour la topologie étale.

(3.2) Etant donné un faisceau F sur $X_{\text{ét}}$, on appelle fibre de F en \bar{x} l'ensemble (resp. le groupe,...) $F_{\bar{x}} = \varinjlim F(U)$, la limite inductive étant toujours prise sur les voisinages étales de \bar{x} .

Pour qu'un homomorphisme de faisceaux $F \rightarrow G$ soit un mono-/épi-/isomorphisme il faut et il suffit qu'il en soit ainsi des homomorphismes $F_{\bar{x}} \rightarrow G_{\bar{x}}$ induit sur les fibres en tout point géométrique de X . Si X est de type fini sur un corps algébriquement clos, il suffit qu'il en soit ainsi en les points rationnels de X .

(3.3) Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas et F un faisceau sur $X_{\text{ét}}$, l'image directe f_*F de F par f est le faisceau sur $Y_{\text{ét}}$ défini par $f_*F(V) = F(X \times_Y V)$ pour tout V étale sur Y .

Le foncteur $f_* : (\text{Faisc. Ab.}/X_{\text{ét}}) \rightarrow (\text{Faisc. Ab.}/Y_{\text{ét}})$ est exact à gauche. Ses foncteurs dérivés à droite $R^q f_*$ s'appellent images directes supérieures. Si \bar{y} est un point géométrique de Y , on a

$$(R^q f_* F)_{\bar{y}} = \lim_{\longrightarrow} H^q(V \times_Y X, F) ,$$

limite inductive prise sur les voisinages étales V de \bar{y} .

Soient $Q_{Y, \bar{y}}$ le localisé strict de Y en \bar{y} , $\tilde{Y} = \text{Spec}(Q_{Y, \bar{y}})$ et $\tilde{X} = \tilde{X} \times_Y \tilde{Y}$. On peut étendre F à $\tilde{X}_{\text{ét}}$ (c'est un cas particulier de la notion générale d'image réciproque) de la manière suivante: soit \tilde{U} un schéma étale sur \tilde{X} , alors il existe un voisinage étale V de \bar{y} et un schéma étale U sur $X \times_Y V$ tel que $\tilde{U} = U \times_Y \tilde{Y}$; on posera

$$F(\tilde{U}) = \lim_{\longrightarrow} F(U \times_Y V') ,$$

la limite inductive étant prise sur les voisinages étales V' de \bar{y} qui dominent V . Avec cette définition, on a

$$(R^q f_* F)_{\bar{y}} = H^q(\tilde{X}, F) .$$

Le foncteur f_* a un adjoint à gauche f^* , le foncteur "image réciproque". Si \bar{x} est un point géométrique de X et $f(\bar{x})$ son image dans Y , on a $(f^* F)_{\bar{x}} = F_{f(\bar{x})}$. Cette formule montre que f^* est un foncteur exact. Le foncteur f_* transforme donc faisceau injectif en faisceau injectif, et la suite spectrale du foncteur composé $\Gamma \circ f_*$ (resp. $g_* \circ f_*$) fournit la

Suite spectrale de Leray (3.4). - Soient F un faisceau abélien sur $X_{\text{ét}}$ et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas (resp. des morphismes de schémas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$).

On a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* F) \Rightarrow H^{p+q}(X, F)$$

(resp. $E_2^{p,q} = R^p g_* R^q f_* F \Rightarrow R^{p+q}(gf)_* F$).

Corollaire (3.5). - Si $R^q f_* F = 0$ pour tout $q > 0$, on a $H^p(Y, f_* F) = H^p(X, F)$ (resp. $R^p f_* (f_* F) = R^p(gf)_* F$) pour tout $p \geq 0$.

Cela s'applique en particulier dans le cas suivant:

Proposition (3.6). - Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini (voire, par passage à la limite, un morphisme entier) et F un faisceau abélien sur X . Alors $R^q f_* F = 0$, pour tout $q > 0$.

En effet soient \bar{y} un point géométrique de Y , \tilde{Y} le spectre du localisé strict de Y en y et $\tilde{X} = X \times_Y \tilde{Y}$; d'après ce qui précède, il suffit de montrer que $H^q(\tilde{X}, F) = 0$ pour tout $q > 0$. Or \tilde{X} est le spectre d'un produit d'anneaux locaux strictement henséliens [cf. Anneaux locaux henséliens, chapitre I], le foncteur $\Gamma(\tilde{X}, \cdot)$ est exact car tout \tilde{X} -schéma étale et surjectif admet une section, d'où l'assertion.

4. Cohomologie galoisienne.

Pour $X = \text{Spec}(K)$ le spectre d'un corps, nous allons voir que la cohomologie étale s'identifie à la cohomologie galoisienne.

(4.1) Commençons par une analogie topologique. Si K est le corps des fonctions d'une variété algébrique affine intègre $Y = \text{Spec}(A)$ sur \mathbb{C} , on a $K = \varinjlim_{f \in A} A[1/f]$.

Autrement dit $X = \varprojlim U$, U parcourant l'ensemble des ouverts de Y . On sait qu'il existe des ouverts de Zariski arbitrairement petits qui pour la topologie classique sont des $K(\pi, 1)$. On ne sera donc pas surpris si l'on considère $\text{Spec}(K)$ lui-même comme un $K(\pi, 1)$, π étant le groupe fondamental (au sens algébrique) de X , autrement dit le groupe de Galois de \bar{K}/K , où \bar{K} est une clôture séparable de K .

(4.2) Plus précisément soient K un corps, \bar{K} une clôture séparable de K et $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ le groupe de Galois topologique. A toute K -algèbre finie étale A (produit fini d'extensions séparables de K), associons l'ensemble fini $\text{Hom}_K(A, \bar{K})$. Le groupe de Galois G opère sur cet ensemble à travers un quotient discret (donc fini). Si $A = K[T]/(F)$, il s'identifie à l'ensemble des racines dans \bar{K} du polynôme F . La théorie de Galois, sous la forme que lui a donnée Grothendieck, dit que:

Proposition (4.3). - Le foncteur:

$(K\text{-algèbres finies étales}) \rightarrow (\text{ensembles finis sur lesquels } G \text{ opère continûment})$
qui à une algèbre étale A associe $\text{Hom}_K(A, \bar{K})$ est une anti-équivalence de catégories.

On en déduit une description analogue des faisceaux pour la topologie étale sur $\text{Spec}(K)$:

Proposition (4.4). - Le foncteur:

$(\text{Faisceaux étales sur } \text{Spec}(K)) \rightarrow (\text{ensembles sur lesquels } G \text{ opère continûment})$
qui à un faisceau F associe sa fibre $F_{\bar{K}}$ au point géométrique $\text{Spec}(\bar{K})$ est une équivalence de catégories.

On dit que G opère continûment sur un ensemble E si le fixateur de tout élément de E est un sous-groupe ouvert de G . Le foncteur en sens inverse est décrit de la manière évidente: soient A une K -algèbre finie étale, $U = \text{Spec}(A)$ et $U(\bar{K}) = \text{Hom}_K(A, \bar{K})$ le G -ensemble correspondant à A ; alors on a $F(U) = \text{Hom}_{G\text{-ens}}(U(\bar{K}), F_{\bar{K}})$.

En particulier, si $X = \text{Spec}(K)$, on a $F(X) = F_{\bar{K}}^G$. Si l'on se restreint aux faisceaux abéliens, on obtient en passant aux foncteurs dérivés des isomorphismes canoniques

$$H^q(X_{\text{ét}}, F) = H^q(G, F_{\bar{K}}) .$$

Exemples (4.5). - a) Au faisceau constant \mathbb{Z}/n correspond \mathbb{Z}/n avec action triviale de G .

b) Au faisceau des racines n -ièmes de l'unité μ_n correspond le groupe $\mu_n(\bar{K})$ des racines n -ièmes de l'unité dans \bar{K} , avec l'action naturelle de G .

c) Au faisceau \mathbb{G}_m correspond le groupe \bar{K}^* avec l'action naturelle de G

III. Cohomologie des courbes.

Dans le cas des espaces topologiques, des dévissages utilisant la formule de Künneth et des décompositions simpliciales permettent de se ramener pour calculer la cohomologie à l'intervalle $I = [0, 1]$ pour lequel on a $H^0(I, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $H^q(I, \mathbb{Z}) = 0$ pour $q > 0$.

Dans notre cas, les dévissages aboutiront à des objets plus compliqués, à savoir les courbes sur un corps algébriquement clos; nous allons calculer leur cohomologie dans ce chapitre. La situation est plus complexe que dans le cas topologique car les groupes de cohomologie sont nuls pour $q > 2$ seulement. L'ingrédient essentiel des calculs est la nullité du groupe de Brauer du corps des fonctions d'une telle courbe (théorème de Tsen, § 2).

1. Le groupe de Brauer.

Rappelons-en tout d'abord la définition classique:

Définition (1.1). - Soit K un corps et A une K -algèbre de dimension finie.
On dit que A est une algèbre simple centrale sur K si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées:

- a) A n'a pas d'idéal bilatère non trivial et son centre est K .
- b) Il existe une extension galoisienne finie K'/K telle que $A_{K'} = A \otimes_K K'$ soit isomorphe à une algèbre de matrices carrées sur K' .
- c) A est K -isomorphe à une algèbre de matrices carrées sur un corps gauche de centre K .

Deux telles algèbres sont dites équivalentes si les corps gauches qui leur sont associés par c) sont K -isomorphes. Si ces algèbres ont même dimension, cela revient à dire qu'elles sont K -isomorphes. Le produit tensoriel définit par passage au quotient une structure de groupe abélien sur l'ensemble des classes

d'équivalence. C'est ce groupe que l'on appelle classiquement le groupe de Brauer de K et que l'on note $Br(K)$.

(1.2) On notera $Br(n, K)$ l'ensemble des classes de K -isomorphisme de K -algèbres A telles qu'il existe une extension galoisienne finie K' de K pour laquelle $A_{K'}$ est isomorphe à l'algèbre $M_n(K')$ des matrices carrées $n \times n$ sur K' . Par définition $Br(K)$ est réunion des sous-ensembles $Br(n, K)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soient \bar{K} une clôture algébrique de K et $G = Gal(\bar{K}/K)$. L'ensemble $Br(n, K)$ est l'ensemble des "formes" de $M_n(\bar{K})$, il est donc canoniquement isomorphe à $H^1(G, Aut(M_n(\bar{K})))$.

On sait que tout automorphisme de $M_n(\bar{K})$ est intérieur. Par conséquent le groupe $Aut(M_n(\bar{K}))$ s'identifie au groupe linéaire projectif $PGL(n, \bar{K})$ et on a une bijection canonique:

$$\theta_n : Br(n, K) \xrightarrow{\sim} H^1(G, PGL(n, \bar{K})) .$$

D'autre part la suite exacte:

$$(*) \quad 1 \rightarrow \bar{K}^* \rightarrow GL(n, \bar{K}) \rightarrow PGL(n, \bar{K}) \rightarrow 1 ,$$

permet de définir un opérateur cobord:

$$\Delta_n : H^1(G, PGL(n, \bar{K})) \rightarrow H^2(G, \bar{K}^*) .$$

En composant θ_n et Δ_n , on obtient une application:

$$\delta_n : Br(n, K) \rightarrow H^2(G, \bar{K}^*) .$$

On vérifie facilement que les applications δ_n sont compatibles entre elles et définissent un homomorphisme de groupes:

$$\delta : Br(K) \rightarrow H^2(G, \bar{K}^*) .$$

Proposition (1.3) . - L'homomorphisme $\delta : \text{Br}(K) \rightarrow H^2(G, \bar{K}^*)$ est bijectif.

Cela résulte des deux lemmes suivants:

Lemme (1.4) . - L'application $\Delta_n : H^1(G, \text{PGL}(n, \bar{K})) \rightarrow H^2(G, \bar{K}^*)$ est injective.

D'après [14], cor. à la prop. I-44, il suffit de vérifier que chaque fois qu'on tord la suite exacte (*) par un élément de $H^1(G, \text{PGL}(n, \bar{K}))$, le H^1 du groupe médian est trivial. Ce groupe médian est le groupe des \bar{K} -points du groupe multiplicatif d'une algèbre centrale simple A de rang n^2 sur K. Pour prouver que $H^1(G, A^*_K) = 0$, on interprète A^* comme le groupe des automorphismes du A-module libre L de rang 1, et H^1 comme l'ensemble des "formes" de L - des A-modules de rang n^2 sur K, automatiquement libres.

Lemme (1.5). Soient $\alpha \in H^2(G, \bar{K}^*)$, K' une extension finie de K contenue dans \bar{K} , $n = [K' : K]$, et $G' = \text{Gal}(\bar{K}/K')$. Si l'image de α dans $H^2(G', \bar{K}^*)$ est nulle, alors, α appartient à l'image de Δ_n .

Remarquons tout d'abord qu'on a:

$$H^2(G', \bar{K}^*) \simeq H^2(G, (\bar{K} \otimes_K K')^*) .$$

[D'un point de vue géométrique si l'on note $x = \text{Spec}(K)$, $x' = \text{Spec}(K')$ et $\pi : x' \rightarrow x$ le morphisme canonique, on a $R^q \pi_* (\mathbb{G}_{m, x'}) = 0$ pour $q > 0$ et par suite $H^q(x', \mathbb{G}_{m, x'}) \simeq H^q(x, \pi_* \mathbb{G}_{m, x'})$ pour $q \geq 0$].

Par ailleurs le choix d'une base de K' en tant qu'espace vectoriel sur K permet de définir un homomorphisme

$$(\bar{K} \otimes_K K')^* \rightarrow \text{GL}(n, \bar{K})$$

qui, à un élément x , fait correspondre l'endomorphisme de multiplication par x de $\bar{K} \otimes_K K'$. On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & \bar{K}^* & \rightarrow & (\bar{K} \otimes_K K')^* & \rightarrow & (\bar{K} \otimes_K K')^* / \bar{K}^* \rightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \rightarrow & \bar{K}^* & \rightarrow & GL(n, \bar{K}) & \rightarrow & PGL(n, \bar{K}) \rightarrow 1
 \end{array}$$

Le lemme résulte du diagramme commutatif que l'on en déduit en passant à la cohomologie:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(G, (\bar{K} \otimes_K K')^* / \bar{K}^*) & \rightarrow & H^2(G, \bar{K}^*) & \rightarrow & H^2(G, (\bar{K} \otimes_K K')^*) \\
 \downarrow & & \parallel & & \\
 H^1(G, PGL(n, \bar{K})) & \xrightarrow{\Delta_n} & H^2(G, \bar{K}^*) & . &
 \end{array}$$

La connaissance du groupe de Brauer, en particulier sa nullité, est extrêmement importante en cohomologie galoisienne comme le montre la proposition suivante:

Proposition (1.6). - Soient K un corps, \bar{K} une clôture algébrique de K et $G = Gal(\bar{K}/K)$. Supposons que, pour toute extension finie K' de K, on ait $Br(K') = 0$. Alors on a:

- (i) $H^q(G, \bar{K}^*) = 0$ pour tout $q > 0$.
- (ii) $H^q(G, F) = 0$ pour tout G-module de torsion F et pour tout $q \geq 2$.

[Pour la démonstration, cf. J.P. SERRE, Corps locaux ou Cohomologie galoisienne].

2. Le théorème de Tsen.

Définition (2.1). - On dit qu'un corps K est C_1 si tout polynôme homogène non constant $f(x_1, \dots, x_n)$ de degré $d < n$ a un zéro non trivial.

Proposition (2.2). - Si un corps K est C_1 , on a $\text{Br}(K) = 0$.

Il s'agit de montrer que tout corps gauche D de centre K et fini sur K est égal à K . Soient r^2 le degré de D sur K et $\text{Nrd} : D \rightarrow K$ la norme réduite.

[Localement pour la topologie étale sur K , D est isomorphe - non canoniquement - à une algèbre de matrices M_r et la norme réduite coïncide avec l'application déterminant. Celle-ci est bien définie, indépendamment de l'isomorphisme choisi entre D et M_r car tout automorphisme de M_r est intérieur et deux matrices semblables ont même déterminant. Cette application définie localement pour la topologie étale se descend, à cause de son unicité locale, en une application $\text{Nrd} : D \rightarrow K$] .

Le seul zéro de Nrd est l'élément nul de D , car, si $x \neq 0$, on a $\text{Nrd}(x) \cdot \text{Nrd}(x^{-1}) = 1$. D'autre part, si $\{e_1, \dots, e_{r^2}\}$ est une base de D sur K et si $x = \sum x_i e_i$, la fonction $\text{Nrd}(x)$ s'écrit comme un polynôme homogène $\text{Nrd}(x_1, \dots, x_{r^2})$ de degré r [c'est clair localement pour la topologie étale] . Puisque K est C_1 , on a $r^2 \leq r$, c'est-à-dire $r = 1$ et $D = K$.

Théorème (2.3) (Tsen). - Soient k un corps algébriquement clos et K une extension de degré de transcendance 1 de k . Alors K est C_1 .

Supposons tout d'abord que $K = k(X)$. Soit

$$f(\underline{T}) = \sum a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n}$$

un polynôme homogène de degré $d < n$ à coefficients dans $k(X)$. Quitte à multiplier les coefficients par un dénominateur commun on peut supposer qu'ils sont dans $k[X]$. Soit alors $\delta = \sup \deg(a_{i_1, \dots, i_n})$. On cherche un zéro non trivial dans $k[X]$ par la méthode des coefficients indéterminés en écrivant chaque T_i ($i = 1, \dots, n$) comme un polynôme de degré N en X . Alors l'équation

$f(\underline{T}) = 0$ devient un système d'équations homogènes en les $n \times (N + 1)$ coefficients des polynômes $T_i(X)$ exprimant la nullité des coefficients du polynôme en X obtenu en remplaçant T_i par $T_i(X)$. Ce polynôme est de degré $\delta + Nd$ au plus, il y a donc $\delta + Nd + 1$ équations en $n \times (N + 1)$ variables. Comme k est algébriquement clos ce système a une solution non triviale si $n(N+1) > Nd + \delta + 1$, ce qui sera le cas pour N assez grand si $d < n$.

Il est clair que, pour démontrer le théorème dans le cas général, il suffit de le démontrer lorsque K est une extension finie d'une extension transcendante pure $k(X)$ de k . Soit $f(\underline{T}) = f(T_1, \dots, T_n)$ un polynôme homogène de degré $d < n$ à coefficients dans K . Soient $s = [K : k(X)]$ et e_1, \dots, e_s une base de K sur $k(X)$. Introduisons de nouvelles variables U_{ij} , en nombre sn , telles que $T_i = \sum U_{ij} e_j$. Pour que le polynôme $f(\underline{T})$ ait un zéro non trivial dans K , il suffit que le polynôme $g(X_{ij}) = N_{K/k}(f(\underline{T}))$ ait un zéro non trivial dans $k(X)$. Or g est un polynôme homogène de degré sd en sn variables, d'où le résultat.

Corollaire (2.4). - Soient k un corps algébriquement clos et K une extension de degré de transcendance 1 de k . Alors les groupes de cohomologie étale $H^q(\text{Spec}(K), \mathbb{G}_m)$ sont nuls pour tout $q > 0$.

3. Cohomologie des courbes lisses.

Dorénavant, et sauf mention expresse du contraire, les groupes de cohomologie considérés sont les groupes de cohomologie étale.

Proposition (3.1). - Soient k un corps algébriquement clos et X une courbe projective non singulière connexe sur k . Alors on a:

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathbb{C}_m) &= k^* , \\ H^1(X, \mathbb{C}_m) &= \text{Pic}(X) , \\ H^q(X, \mathbb{C}_m) &= 0 \quad \text{pour } q \geq 2 . \end{aligned}$$

Soient η le point générique de X , $j : \eta \rightarrow X$ le morphisme canonique et $\mathbb{C}_{m,\eta}$ le groupe multiplicatif du corps des fractions $K(X)$ de X . Pour tout point fermé x de X , soient $i_x : x \rightarrow X$ l'immersion canonique et \mathbb{Z}_x le faisceau constant de valeur \mathbb{Z} sur x . Ainsi $j_* \mathbb{C}_{m,\eta}$ est le faisceau des fonctions méromorphes non nulles sur X et $\bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x$ le faisceau des diviseurs, on a donc une suite exacte de faisceaux:

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C}_m \rightarrow j_* \mathbb{C}_{m,\eta} \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x \rightarrow 0 .$$

Lemme (3.2). - On a $R^q j_* \mathbb{C}_{m,\eta} = 0$ pour tout $q > 0$.

Il suffit de montrer que la fibre de ce faisceau en tout point fermé x de X est nulle. Si $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$ est l'hensélisé de X en x et K le corps des fractions de $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$, on a

$$\text{Spec}(K) = \eta \times_X \text{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}) ,$$

$$\text{donc } (R^q j_* \mathbb{C}_{m,\eta})_x = H^q(\text{Spec}(K), \mathbb{C}_m) .$$

Or K est une extension algébrique de $k(X)$, donc une extension de degré de transcendance 1 de k : le lemme résulte de (2.4).

Lemme (3.3). - On a $H^q(X, j_* \mathbb{C}_{m,\eta}) = 0$ pour tout $q > 0$.

En effet de (3.2) et de la suite spectrale de Leray pour j , on déduit:

$$H^q(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) = H^q(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta})$$

pour tout $q \geq 0$ et le deuxième membre est nul pour $q > 0$ d'après (2.4).

Lemme (3.4). - On a $H^q(X, \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x) = 0$ pour tout $q > 0$.

En effet pour tout point fermé x de X , on a $R^q i_{x*} \mathbb{Z}_x = 0$ pour $q > 0$, car i_x est un morphisme fini (II.3.6), et

$$H^q(X, i_{x*} \mathbb{Z}_x) = H^q(x, \mathbb{Z}_x) .$$

Le deuxième membre est nul pour tout $q > 0$, car x est le spectre d'un corps algébriquement clos [On voit que le lemme est vrai plus généralement pour tout faisceau "gratte-ciel" sur X].

On déduit des lemmes précédents et de la suite exacte (*) les égalités:

$$H^q(X, \mathbb{G}_m) = 0 \text{ pour } q \geq 2 ,$$

et une suite exacte de cohomologie en bas degré:

$$1 \rightarrow H^0(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^0(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) \rightarrow H^0(X, \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x) \rightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow 1$$

qui n'est autre que la suite exacte:

$$1 \rightarrow k^* \rightarrow k(X)^* \rightarrow \text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 1 .$$

De la proposition (3.1) on déduit que les groupes de cohomologie de X à valeur dans \mathbb{Z}/n , n premier à la caractéristique de k , ont une valeur raisonnable:

Corollaire (3.5) - Si X est de genre g et si n est inversible dans k, les
 $H^q(X, \mathbb{Z}/n)$ sont nuls pour $q > 2$, et libres sur \mathbb{Z}/n de rang $1, 2g, 1$ pour
 $q = 0, 1, 2$. Remplaçant \mathbb{Z}/n par le groupe isomorphe μ_n , on a des isomorphismes
canoniques

$$\begin{aligned} H^0(X, \mu_n) &= \mu_n \\ H^1(X, \mu_n) &= \text{Pic}^0(X)_n \\ H^2(X, \mu_n) &= \mathbb{Z}/n \end{aligned}$$

Comme le corps k est algébriquement clos, \mathbb{Z}/n est isomorphe (non canoniquement) à μ_n . De la suite exacte de Kummer:

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 0,$$

et de la proposition (3.1), on déduit les égalités:

$$H^q(X, \mathbb{Z}/n) = 0 \text{ pour } q > 2,$$

et, en bas degré, des suites exactes:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mu_n) \rightarrow k^* \xrightarrow{n} k^* \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H^1(X, \mu_n) \rightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{n} \text{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X, \mu_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De plus on a une suite exacte:

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

et $\text{Pic}^0(X)$ s'identifie au groupe des points rationnels sur k d'une variété abélienne de dimension g , la jacobienne de X . Dans un tel groupe, la multiplication par n est surjective et son noyau est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module libre de rang $2g$ (car n est inversible dans k); d'où le corollaire.

Un dévissage astucieux, utilisant la "méthode de la trace", permet

d'obtenir en corollaire la

Proposition (3.6) (SGA4 IX 5.7). - Soient k un corps algébriquement clos, X une courbe algébrique sur k et F un faisceau de torsion sur X . Alors:

- (i) On a $H^q(X, F) = 0$ pour $q > 2$.
- (ii) Si X est affine, on a même $H^q(X, F) = 0$ pour $q > 1$.

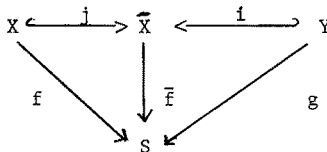
Pour la démonstration, ainsi que pour l'exposé de la "méthode de la trace", nous renvoyons à SGA4 IX 5.

4. Déviassages.

Pour calculer la cohomologie des variétés de dimension > 1 on emploie des fibrations par des courbes, ce qui permet de se ramener à étudier les morphismes dont les fibres sont de dimension ≤ 1 . Ce principe possède plusieurs variantes, indiquons-en quelques-unes.

(4.1) Soient A une k -algèbre de type fini et a_1, \dots, a_n des générateurs de A . Si l'on pose $X_0 = \text{Spec}(k)$, $X_i = \text{Spec}(k[a_1, \dots, a_i])$, $X_n = \text{Spec}(A)$, les inclusions canoniques $k[a_1, \dots, a_i] \rightarrow k[a_1, \dots, a_i, a_{i+1}]$ définissent des morphismes $X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$ dont les fibres sont de dimension ≤ 1 .

(4.2) Dans le cas d'un morphisme lisse, on peut être plus précis. On appelle fibration élémentaire un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ qui peut être plongé dans un diagramme commutatif

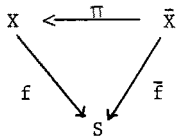


satisfaisant aux conditions suivantes:

- (i) j est une immersion ouverte dense dans chaque fibre et $X = \bar{X} - Y$.
- (ii) \bar{f} est lisse et projectif, à fibres géométriques irréductibles et de dimension 1.
- (iii) g est un revêtement étale et aucune fibre de g n'est vide.

On appelle bon voisinage relatif à S un S -schéma X tel qu'il existe des S -schémas $X = X_n, \dots, X_0 = S$ et des fibrations élémentaires $f_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. On peut montrer [SGA 4, XI, 3.3] que si X est un schéma lisse sur un corps algébriquement clos k tout point rationnel de X possède un voisinage ouvert qui est un bon voisinage (relatif à $\text{Spec}(k)$).

(4.3) On peut dévisser un morphisme propre $f : X \rightarrow S$ de la façon suivante. D'après le lemme de Chow, il existe un diagramme commutatif



où π et \bar{f} sont des morphismes projectifs, π étant de plus un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de X . Localement sur S , \bar{X} est un sous-schéma fermé d'un espace projectif type \mathbb{P}_S^n .

On dévisse ce dernier en considérant la projection $\varphi : \mathbb{P}_S^n \rightarrow \mathbb{P}_S^1$ qui envoie le point de coordonnées homogènes (x_0, x_1, \dots, x_n) sur (x_0, x_1) . C'est une application rationnelle définie en dehors du fermé $Y \simeq \mathbb{P}_S^{n-2}$ de \mathbb{P}_S^n d'équations homogènes $x_0 = x_1 = 0$. Soit $u : P \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ l'éclatement à centre Y ; les fibres de u sont de dimension ≤ 1 . De plus il existe un morphisme naturel $v : P \rightarrow \mathbb{P}_S^1$ qui prolonge l'application rationnelle φ et v fait

de P un \mathbb{P}_S^1 -schéma localement isomorphe à l'espace projectif type \mathbb{P}^{n-1} que l'on peut à son tour projeter sur un \mathbb{P}^1 , etc.

(4.4) On peut balayer une variété projective et lisse X par un pinceau de Lefschetz. L'éclaté \tilde{X} de l'intersection de l'axe du pinceau avec X se projette sur \mathbb{P}^1 et les fibres de cette projection sont les sections hyperplanes de X par les hyperplans du pinceau.

IV. Théorème de changement de base pour un morphisme propre.

1. Introduction.

Ce chapitre est consacré à la démonstration et aux applications du

Théorème (1.1). - Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre de schémas et F un faisceau abélien de torsion sur X . Alors, quel que soit $q \geq 0$, la fibre de $R^q f_* F$ en un point géométrique s de S est isomorphe à la cohomologie $H^q(X_s, F)$ de la fibre $X_s = X \otimes_S \text{Spec } k(s)$ de f en s .

Pour $f : X \rightarrow S$ une application continue propre et séparée (séparée signifie que la diagonale de $X \times_S X$ est fermée) entre espaces topologiques, et F un faisceau abélien sur X , le résultat analogue est bien connu, et élémentaire: comme f est fermée, les $f^{-1}(V)$ pour V voisinage de s forment un système fondamental de voisinages de X_s , et on vérifie que $H^*(X_s, F) = \varinjlim_U H^*(U, F)$, pour U parcourant les voisinages de X_s . En pratique, X_s a même un système fondamental \mathcal{U} de voisinages U dont il est rétracte par déformation et, pour F constant, on a donc $H^*(X_s, F) = H^*(U, F)$. En termes imagés: la fibre spéciale avale la fibre générale.

Dans le cas des schémas la démonstration est plus délicate et il est indispensable de supposer que F est de torsion (SGA4 XII 2). Compte tenu de la description des fibres de $R^q f_* F$ (II.3.3), le théorème (1.1) est essentiellement équivalent au

Théorème (1.2). - Soient A un anneau local strictement hensélien et $S = \text{Spec}(A)$. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre et X_0 la fibre fermée de f . Alors, pour tout faisceau abélien de torsion F sur X et pour tout $q \geq 0$, on a $H^q(X, F) \cong H^q(X_0, F)$.

Par passage à la limite on voit qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque A est l'hensélisé strict d'une \mathbb{Z} -algèbre de type fini en un idéal premier. On traite d'abord le cas $q = 0$ ou 1 et $F = \mathbb{Z}/n$ (§ 2). Un argument basé sur la notion de faisceau constructible (§ 3) montre d'ailleurs qu'il suffit de considérer le cas où F est constant. D'autre part le dévissage (III, 4.3) permet de supposer que X_0 est une courbe; dans ce cas il ne reste plus qu'à démontrer le théorème pour $q = 2$ (§4).

Entre autres applications (§ 6), le théorème permet de définir la notion de cohomologie à support propre (§ 5).

2. Démonstration pour $q = 0$ ou 1 et $F = \mathbb{Z}/n$.

Le résultat pour $q = 0$ et F constant est équivalent à la proposition suivante [théorème de connexion de Zariski]:

Proposition (2.1). - Soient A un anneau local hensélien noethérien et $S = \text{Spec}(A)$. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre et X_0 la fibre fermée de f . Alors les ensembles de composantes connexes $\pi_0(X)$ et $\pi_0(X_0)$ sont en bijection.

Il revient au même de montrer que les ensembles de parties à la fois ouvertes et fermées $\text{Of}(X)$ et $\text{Of}(X_0)$ sont en bijection. On sait que l'ensemble $\text{Of}(X)$ correspond bijectivement à l'ensemble des idempotents de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, de même $\text{Of}(X_0)$ correspond bijectivement à l'ensemble des idempotents de $\Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$. Il s'agit donc de montrer que l'application canonique

$$\text{Idem } \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Idem } \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$$

est bijective.

On notera \mathfrak{m} l'idéal maximal de A , $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\wedge$ le complété de

$\Gamma(X, \underline{O}_X)$ pour la topologie \underline{m} -adique et, pour tout entier $n \geq 0$,
 $X_n = X \otimes_A A/\underline{m}^{n+1}$. D'après le théorème de finitude pour les morphismes propres
 [EGA III, 3.2], $\Gamma(X, \underline{O}_X)$ est une A -algèbre finie; comme A est hensélien, il
 en résulte que l'application canonique

$$\text{Idem } \Gamma(X, \underline{O}_X) \rightarrow \text{Idem } \Gamma(X, \underline{O}_X)^\wedge$$

est bijective.

D'après le théorème de comparaison pour les morphismes propres
 [EGA III, 4.1], l'application canonique

$$\Gamma(X, \underline{O}_X)^\wedge \rightarrow \varprojlim \Gamma(X_n, \underline{O}_{X_n})$$

est bijective. En particulier l'application canonique

$$\text{Idem } \Gamma(X, \underline{O}_X)^\wedge \rightarrow \varprojlim \text{Idem } \Gamma(X_n, \underline{O}_{X_n})$$

est bijective. Mais, puisque X_n et X_0 ont même espace topologique sous-jacent,
 l'application canonique

$$\text{Idem } \Gamma(X_n, \underline{O}_{X_n}) \rightarrow \text{Idem } \Gamma(X_0, \underline{O}_{X_0})$$

est bijective pour tout n , ce qui achève la démonstration.

Puisque $H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ est en bijection avec l'ensemble des classes
 d'isomorphisme de revêtements étales galoisiens de X de groupe \mathbb{Z}/n , le
 théorème pour $q=1$ et $F = \mathbb{Z}/n$ résulte de la proposition suivante.

Proposition (2.2). - Soient A un anneau local hensélien noethérien et
 $S = \text{Spec}(A)$. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre et X_0 la fibre fermée
de f . Alors le foncteur de restriction

$$\text{Rev.et.}(X) \rightarrow \text{Rev.et.}(X_0)$$

est une équivalence de catégories.

[Si X_0 est connexe et si l'on a choisi un point géométrique de X_0 comme point base, cela revient à dire que l'application canonique $\pi_1(X_0) \rightarrow \pi_1(X)$ sur les groupes fondamentaux (profinis) est bijective].

La proposition (2.1) montre que ce foncteur est pleinement fidèle. En effet, si X' et X'' sont deux revêtements étales de X , un X -morphisme de X' dans X'' est déterminé par son graphe qui est une partie ouverte et fermée de $X' \times_X X''$.

Il s'agit donc de montrer que tout revêtement étale X'_0 de X_0 s'étend en un revêtement étale de X . On sait que les revêtements étales ne dépendent pas des éléments nilpotents [SGA 1, chap. I], par conséquent X'_0 se relève de manière unique en un revêtement étale X'_n de X_n pour tout $n \geq 0$, autrement dit en un revêtement étale \mathcal{X}' du schéma formel \mathcal{X} complété de X le long de X_0 . D'après le théorème d'algébrisation des faisceaux cohérents formels de Grothendieck [théorème d'existence, EGA III.5], \mathcal{X}' est le complété formel d'un revêtement étale \bar{X}' de $\bar{X} = X \otimes_{\hat{A}}$.

Par passage à la limite, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où A est l'hensélisé d'une \mathbb{Z} -algèbre de type fini. On peut alors appliquer le théorème d'approximation d'Artin au foncteur $F: (A\text{-algèbres}) \rightarrow (\text{ensembles})$ qui, à une A -algèbre B , fait correspondre l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements étales de $X \otimes_A B$. En effet ce foncteur est localement de présentation finie: si B_i est un système inductif filtrant de A -algèbres et si $B = \varinjlim B_i$, on a $F(B) = \varinjlim F(B_i)$. D'après le théorème d'Artin, étant donné un élément $\bar{\xi} \in F(\hat{A})$, en l'occurrence la classe d'isomorphisme de \bar{X}' , il existe $\xi \in F(A)$ ayant même image que $\bar{\xi}$ dans $F(A/\mathfrak{m})$. Autrement dit il existe un revêtement étale X' de X dont la restriction à X_0 est isomorphe

à X'_0 .

3. Faisceaux constructibles.

Dans ce paragraphe, on considère un schéma noethérien X et on appelle faisceau sur X un faisceau abélien sur $X_{\text{ét}}$.

Définition (3.1). - On dit qu'un faisceau F sur X est localement constant constructible (en abrégé l.c.c.) s'il est représenté par un revêtement étale de X .

Définition (3.2). - On dit qu'un faisceau F sur X est constructible s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes:

(i) Il existe une famille finie surjective de sous-schémas X_i de X tels que la restriction de F à X_i soit l.c.c..

(ii) Il existe une famille finie de morphismes finis $p_i : X'_i \rightarrow X$, pour chaque i un faisceau constant constructible (= défini par un groupe abélien fini) C_i sur X'_i , et un monomorphisme $F \rightarrow \prod_{i^*} C_i$.

On vérifie facilement que la catégorie des faisceaux constructibles sur X est une catégorie abélienne. De plus, si $u : F \rightarrow G$ est un homomorphisme de faisceaux et si F est constructible, le faisceau $\text{Im}(u)$ est constructible.

Lemme (3.3). - Tout faisceau de torsion F est limite inductive filtrante de faisceaux constructibles.

En effet, si $j : U \rightarrow X$ est un schéma étale de type fini sur X , un élément $\xi \in F(U)$ tel que $n\xi = 0$ définit un homomorphisme de faisceaux $j_! \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \rightarrow F$ dont l'image (le plus petit sous-faisceau de F dont ξ soit section locale) est un sous-faisceau constructible de F . Il est clair que F est limite inductive de tels sous-faisceaux.

Définition (3.4). - Soient \mathcal{C} une catégorie abélienne et T un foncteur défini

sur \mathcal{C} à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. On dira que T est effaçable dans \mathcal{C} si, pour tout objet A de \mathcal{C} et tout $\alpha \in T(A)$, il existe un monomorphisme $u : A \rightarrow M$ dans \mathcal{C} tel que $T(u).\alpha = 0$.

Lemme (3.5). - Les foncteurs $H^q(X, \cdot)$ pour $q > 0$ sont effaçables dans la catégorie des faisceaux constructibles sur X .

Il suffit de remarquer que, si F est un faisceau constructible, il existe nécessairement un entier $n > 0$ tel que F soit un faisceau de \mathbb{Z}/n -modules. Alors il existe un monomorphisme $F \hookrightarrow G$, où G est un faisceau de \mathbb{Z}/n -modules et $H^q(X, G) = 0$ pour tout $q > 0$. On peut par exemple prendre pour G la résolution de Godement $\prod_{x \in X} i_{x*} F_x^-$, où x parcourt les points de X et $i_x : \bar{x} \rightarrow X$ est un point géométrique centré en x . D'après (3.3) G est limite inductive de faisceaux constructibles, d'où le lemme, car les foncteurs $H^q(X, \cdot)$ commutent aux limites inductives.

Lemme (3.6). - Soit $\varphi^* : T^* \rightarrow T'^*$ un morphisme de foncteurs cohomologiques définis sur une catégorie abélienne \mathcal{C} et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Supposons que T^q est effaçable pour $q > 0$ et soit \mathcal{E} un sous-ensemble d'objets de \mathcal{C} tel que tout objet de \mathcal{C} soit contenu dans un objet appartenant à \mathcal{E} . Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\varphi^q(A)$ est bijectif pour tout $q \geq 0$ et tout $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$.
- (ii) $\varphi^0(M)$ est bijectif et $\varphi^q(M)$ surjectif pour tout $q > 0$ et tout $M \in \mathcal{E}$.
- (iii) $\varphi^0(A)$ est bijectif pour tout $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et T'^q est effaçable pour tout $q > 0$.

La démonstration se fait par récurrence sur q et ne présente pas de difficultés.

Proposition (3.7). - Soit X_0 un sous-schéma de X . Supposons que, pour tout
 $n \geq 0$ et pour tout schéma X' fini sur X , l'application canonique

$$H^q(X', \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^q(X'_0, \mathbb{Z}/n) ,$$

où $X'_0 = X' \times_X X_0$, est bijective pour $q = 0$ et surjective pour $q > 0$.

Alors, pour tout faisceau de torsion F sur X et pour tout $q \geq 0$, l'appli-
cation canonique

$$H^q(X, F) \rightarrow H^q(X_0, F)$$

est bijective.

Par passage à la limite, il suffit de démontrer l'assertion pour F constructible. On applique le lemme (3.6) en prenant pour \mathcal{C} la catégorie des faisceaux constructibles sur X , $T^q = H^q(X, \bullet)$, $T'^q = H^q(X_0, \bullet)$ et \mathcal{E} l'ensemble des faisceaux constructibles de la forme $\pi_{p_i^*} C_i$, où $p_i : X'_i \rightarrow X$ est un morphisme fini et C_i un faisceau constant fini sur X'_i .

4. Fin de la démonstration.

Par la méthode de fibration par des courbes (III.4.3), on se ramène à démontrer le théorème en dimension relative ≤ 1 . D'après le paragraphe précédent, il suffira de montrer que, si S est le spectre d'un anneau local noethérien strictement hensélien, $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre dont la fibre fermée X_0 est de dimension ≤ 1 et n un entier ≥ 0 , l'homomorphisme canonique

$$H^q(X, \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^q(X_0, \mathbb{Z}/n)$$

est bijectif pour $q = 0$ et surjectif pour $q > 0$.

Les cas $q = 0$ et 1 ont été vus plus haut et on a $H^q(X_0, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q \geq 3$; il suffit donc de traiter le cas $q = 2$. On peut évidemment supposer

que n est une puissance d'un nombre premier. Si $n = p^r$, où p est la caractéristique du corps résiduel de S , la théorie d'Artin-Schreier montre qu'on a $H^2(X_0, \mathbb{Z}/p^r) = 0$. Si $n = \ell^r$, $\ell \neq p$, on déduit de la théorie de Kummer un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Pic}(X) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^r) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Pic}(X_0) & \xrightarrow{\beta} & H^2(X_0, \mathbb{Z}/\ell^r)
 \end{array}$$

où l'application β est surjective [On l'a vu au chapitre III pour une courbe lisse sur un corps algébriquement clos, mais des arguments similaires s'appliquent à n'importe quelle courbe sur un corps séparablement clos].

Pour conclure, il suffira donc de montrer:

Proposition (4.1). - Soient S le spectre d'un anneau local noethérien hensélien et $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre dont la fibre fermée X_0 est de dimension ≤ 1 . Alors l'application canonique de restriction

$$\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X_0)$$

est surjective [Il suffit d'ailleurs que le morphisme f soit séparé de type fini].

Pour simplifier la démonstration, nous supposons que X est intègre, bien que cela ne soit pas nécessaire. Tout faisceau inversible sur X_0 est associé à un diviseur de Cartier (car X_0 est une courbe, donc quasi-projectif), il suffit donc de montrer que l'application canonique $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(X_0)$ est surjective.

Tout diviseur sur X_0 est combinaison linéaire de diviseurs dont le support est concentré en un seul point fermé non isolé de X_0 . Soient x un

tel point, $t_0 \in \underline{O}_{X_0, x}$ un élément régulier non inversible de $\underline{O}_{X_0, x}$ et D_0 le diviseur concentré en x d'équation locale t_0 . Soit U un voisinage ouvert de x dans X tel qu'il existe une section $t \in \Gamma(U, \underline{O}_U)$ relevant t_0 . Soit Y le fermé de U d'équation $t = 0$; quitte à prendre U assez petit, on peut supposer que x est le seul point de $Y \cap X_0$. Alors Y est quasi-fini au-dessus de S en x ; puisque S est le spectre d'un anneau local hensélien, on en déduit que $Y = Y_1 \amalg Y_2$, où Y_1 est fini sur S et où Y_2 ne rencontre pas X_0 . De plus, comme X est séparé sur S , Y_1 est fermé dans X .

Quitte à remplacer U par un voisinage ouvert plus petit de x , on peut supposer que $Y = Y_1$, autrement dit que Y est fermé dans X . On définit alors un diviseur D sur X relevant D_0 en posant $D|_X - Y = 0$ et $D|_U = \text{div}(t)$ ce qui a un sens car t est inversible sur $U - Y$.

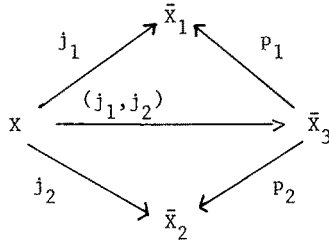
Remarque (4.2). - Dans le cas où f est propre, on pourrait aussi faire une démonstration du même style que celle de la proposition (2.2). En effet, comme X_0 est une courbe, il n'y a pas d'obstruction à relever un faisceau inversible sur X_0 aux voisinages infinitésimaux X_n de X_0 , donc au complété formel \hat{X} de X le long de X_0 . On conclut alors en appliquant successivement le théorème d'existence de Grothendieck et le théorème d'approximation d'Artin.

5. Cohomologie à support propre.

Définition (5.1). - Soit X un schéma séparé de type fini sur un corps k . D'après un théorème de Nagata, il existe un schéma \bar{X} propre sur k et une immersion ouverte $j : X \rightarrow \bar{X}$. Pour tout faisceau de torsion F sur X on note $j_!F$ le prolongement par 0 de F à \bar{X} et on définit les groupes de cohomologie à support propre $H_c^q(X, F)$ en posant

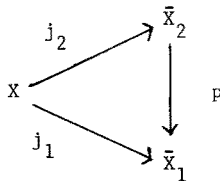
$$H_c^q(X, F) = H^q(\bar{X}, j_!F) .$$

Montrons que cette définition est indépendante de la compactification $j : X \rightarrow \bar{X}$ choisie. Soient $j_1 : X \rightarrow \bar{X}_1$ et $j_2 : X \rightarrow \bar{X}_2$ deux compactifications. Alors X s'envoie dans $\bar{X}_1 \times \bar{X}_2$ par $x \mapsto (j_1(x), j_2(x))$ et l'image fermée \bar{X}_3 de X par cette application est une compactification de X . On a ainsi un diagramme commutatif



où p_1 et p_2 , les restrictions des projections naturelles à \bar{X}_3 , sont des morphismes propres.

Il suffit donc de traiter le cas où on a un diagramme commutatif



avec p un morphisme propre.

Lemme (5.2). - On a $p_*(j_{2!} F) = j_{1!} F$ et $R^q p_*(j_{2!} F) = 0$, pour $q > 0$.

Notons tout de suite que le lemme suffit pour conclure. En utilisant la suite spectrale de Leray du morphisme p , on en déduit qu'on a, pour tout $q \geq 0$,

$$H^q(\bar{X}_2, j_{2!} F) = H^q(\bar{X}_1, j_{1!} F) .$$

Pour démontrer le lemme, on raisonne fibre par fibre en utilisant le

le théorème de changement de base (1.1) pour p . Le résultat est immédiat, car, au-dessus d'un point de X , p est un isomorphisme et, au-dessus d'un point de $\bar{X}_1 - X$, $j_{2!}F$ est nul sur la fibre de p .

(5.3) De même, si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme séparé de type fini de schémas noethériens, il existe un morphisme propre $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow S$ et une immersion ouverte $j : X \rightarrow \bar{X}$. On définit alors les images directes supérieures à support propre $R^q f_!$ en posant pour tout faisceau de torsion F sur X

$$R^q f_! = R^q f_{!*}(j_! F) .$$

On vérifie comme précédemment que cette définition est indépendante de la compactification choisie.

Théorème (5.4). - Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme séparé de type fini de schémas noethériens et F un faisceau de torsion sur X . Alors la fibre de $R^q f_! F$ en un point géométrique s de S est isomorphe à la cohomologie à support propre $H_c^q(X_s, F)$ de la fibre X_s de f en s .

C'est une simple variante du théorème de changement de base pour un morphisme propre (1.1). Plus généralement, si

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array}$$

est un diagramme cartésien, on a un isomorphisme canonique

$$(5.4.1) \quad g^*(R^q f_! F) \simeq R^q f'_! (g'^* F) .$$

6. Applications.

Théorème d'annulation (6.1). - Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme séparé de type fini dont les fibres sont de dimension $\leq n$ et F un faisceau de torsion sur X .

Alors on a $R^q f_* F = 0$ pour $q > 2n$.

D'après le théorème de changement de base, on peut supposer que S est le spectre d'un corps séparablement clos. Si $\dim X = n$, il existe un ouvert affine U de X tel que $\dim(X-U) < n$; on a alors une suite exacte $0 \rightarrow F_U \rightarrow F \rightarrow F_{X-U} \rightarrow 0$ et, par récurrence sur n , il suffit de démontrer le théorème pour $X = U$ affine. Puis la méthode de fibration par des courbes (III.4.1) et le théorème de changement de base permettent de se ramener à une courbe sur un corps séparablement clos pour laquelle on déduit le résultat voulu du théorème de Tsen (cf. III.3.6).

Théorème de finitude (6.2). - Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme séparé de type fini et F un faisceau constructible sur X . Alors les faisceaux $R^q f_* F$ sont constructibles.

Nous ne considérerons que le cas où F est annulé par un entier inversible sur X .

Pour démontrer le théorème on se ramène au cas où F est un faisceau constant \mathbb{Z}/n et où $f : X \rightarrow S$ est un morphisme propre et lisse dont les fibres sont des courbes géométriquement connexes de genre g . Pour n inversible sur X , les faisceaux $R^q f_* F$ sont alors localement libres de rang fini, nuls pour $q > 2$ (6.1). Remplaçant \mathbb{Z}/n par le faisceau localement isomorphe (sur S) μ_n , on a canoniquement

$$(6.2.1) \quad \begin{aligned} R^0 f_* \mu_n &= \mu_n \\ R^1 f_* \mu_n &= \text{Pic}(X/S)_n \\ R^2 f_* \mu_n &= \mathbb{Z}/n \quad . \end{aligned}$$

Théorème (6.3) (comparaison avec la cohomologie classique). -

Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur \mathbb{C} , et F un faisceau de torsion sur X . Notons par un exposant an le foncteur de passage aux espaces topologiques usuels, et par $R^q f_!^{an}$ les foncteurs dérivés du foncteur image directe à support propre par f^{an} . On a

$$(R^q f_! F)^{an} \simeq R^q f_!^{an} F^{an} .$$

En particulier, pour $S =$ un point et F le faisceau constant \mathbb{Z}/n ,

$$H_c^q(X, \mathbb{Z}/n) \simeq H_c^q(X^{an}, \mathbb{Z}/n) .$$

Des dévissages utilisant le théorème de changement de base nous ramènent au cas où X est une courbe propre et lisse, où $S =$ un point, et où $F = \mathbb{Z}/n$. Les groupes de cohomologie considérés sont alors nuls pour $q \neq 0, 1, 2$, et on invoque GAGA: en effet, si X est propre sur \mathbb{C} , on a $\pi_0(X) = \pi_0(X^{an})$ et $\pi_1(X) =$ complété profini de $\pi_1(X^{an})$, d'où l'assertion pour $q = 0, 1$. Pour $q=2$, on utilise la suite exacte de Kummer et le fait que, par GAGA encore, $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(X^{an})$.

Théorème (6.4) (dimension cohomologique des schémas affines). Soient X un schéma affine de type fini sur un corps séparablement clos et F un faisceau de torsion sur X . Alors on a $H^q(X, F) = 0$ pour $q > \dim(X)$.

Pour la très jolie démonstration nous renvoyons à SGA 4, XIV §2 et 3.

Remarque (6.5). - Ce théorème est en quelque sorte un substitut pour la théorie de Morse. Considérons en effet le cas classique où X est lisse et affine sur \mathbb{C} plongé dans un espace affine type \mathbb{C}^N . Alors, pour presque tout point $p \in \mathbb{C}^N$, la fonction "distance à p " sur X est une fonction de Morse et les indices de ses points critiques sont plus petits que $\dim(X)$. Ainsi X est obtenu par recollement d'anses d'indice plus petit que $\dim(X)$, d'où l'analogie classique de (6.4).

V. Acyclicité locale des morphismes lisses

Soient X une variété analytique complexe et $f : X \rightarrow D$ un morphisme de X dans le disque. On note $[0, t]$ le segment de droite fermé d'extrémités 0 et t dans D et $]0, t]$ le segment semi-ouvert. Si f est lisse, l'inclusion

$$j : f^{-1}(]0, t]) \hookrightarrow f^{-1}([0, t])$$

est une équivalence d'homotopie; on peut pousser la fibre spéciale $X_0 = f^{-1}(0)$ dans $f^{-1}([0, t])$.

En pratique, pour t assez petit, $f^{-1}(]0, t])$ sera un fibré sur $]0, t]$ de sorte que l'inclusion

$$X_t = f^{-1}(t) \hookrightarrow f^{-1}(]0, t])$$

sera également une équivalence d'homotopie. On appelle alors morphisme de cospécialisation la classe d'homotopie d'applications:

$$\text{cosp: } X_0 \hookrightarrow f^{-1}([0, t]) \xleftarrow{\cong} f^{-1}(]0, t]) \xleftarrow{\cong} X_t .$$

On peut exprimer cette construction en termes imagés en disant que, pour un morphisme lisse, la fibre générale avale la fibre spéciale.

Ne supposons plus f nécessairement lisse (mais supposons que $f^{-1}(]0, t])$ soit un fibré sur $]0, t]$). On peut encore définir un morphisme cosp^* en cohomologie dès que $j_* \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ et $R^q j_* \mathbb{Z} = 0$ pour $q > 0$. Sous ces hypothèses, la suite spectrale de Leray pour j montre qu'on a

$$H^*(f^{-1}([0, t]), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^*(f^{-1}(]0, t]), \mathbb{Z})$$

et cosp^* est le morphisme composé:

$$\text{cosp}^* : H^*(X_t, \mathbb{Z}) \simeq H^*(f^{-1}(]0, t]), \mathbb{Z}) \simeq H^*(f^{-1}(]0, t]), \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X_0, \mathbb{Z})$$

La fibre de $R^q_{j_*} \mathbb{Z}$ en un point $x \in X_0$ se calcule comme suit. On prend dans un espace ambiant une boule B_ϵ de centre x et de rayon ϵ assez petit, et pour η assez petit, on pose $E = X \cap B_\epsilon \cap f^{-1}(]0, \eta])$; c'est la variété des cycles évanescents en x . On a

$$(R^q_{j_*} \mathbb{Z})_x \simeq H^q(X \cap B_\epsilon \cap f^{-1}(]0, \eta]), \mathbb{Z}) \simeq H^q(E, \mathbb{Z})$$

et le morphisme de cospécialisation est défini en cohomologie dès que les variétés de cycles évanescents sont acycliques [$H^0(E, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $H^q(E, \mathbb{Z}) = 0$ pour $q > 0$], ce qui s'exprime en disant que f est localement acyclique.

Ce chapitre est consacré à l'analogie de cette situation pour un morphisme lisse de schémas et pour la cohomologie étale. Cependant il est indispensable dans ce cadre de se limiter aux coefficients de torsion et d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles. Le paragraphe 1 est consacré à des généralités sur les morphismes localement acycliques et les flèches de cospécialisation. Dans le paragraphe 2, on démontre qu'un morphisme lisse est localement acyclique. Dans le paragraphe 3, on joint ce résultat à ceux du chapitre précédent pour en déduire deux applications: un théorème de spécialisation des groupes de cohomologie (la cohomologie des fibres géométriques d'un morphisme propre et lisse est localement constante) et un théorème de changement de base par un morphisme lisse.

Dans tout ce qui suit, on fixe un entier n et "schéma" signifie "schéma sur lequel n est inversible". "Point géométrique" signifiera toujours "point géométrique algébrique" (II 3.1.) $x: \text{Spec}(k) \rightarrow X$, avec k algébriquement clos.

1. Morphismes localement acycliques.

Notation (1.1). - Etant donnés un schéma S et un point géométrique s de S , on notera \tilde{S}^s le spectre du localisé strict de S en s .

Définition (1.2). - On dit qu'un point géométrique t de S est une générisation de s s'il est défini par une clôture algébrique du corps résiduel d'un point de \tilde{S}^s . On dit aussi que s est une spécialisation de t et on appelle flèche de spécialisation le S -morphisme $t \rightarrow \tilde{S}^s$.

Définition (1.3). - Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. Soient s un point géométrique de S , t une générisation de s , x un point géométrique de X au-dessus de s et $\tilde{X}_t^x = \tilde{X}_t^x \times_{\tilde{S}^s} t$. Alors on dit que \tilde{X}_t^x est une variété de cycles évanescents de f au point x .

On dit que f est localement acyclique si, la cohomologie réduite de toute variété de cycles évanescents \tilde{X}_t^x est nulle:

$$(1.3.1) \quad \hat{H}^*(\tilde{X}_t^x, \mathbb{Z}/n) = 0,$$

i.e. $H^0(\tilde{X}_t^x, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$ et $H^q(\tilde{X}_t^x, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q > 0$.

Lemme (1.4). - Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme localement acyclique et $g : S' \rightarrow S$ un morphisme quasi-fini (ou limite projective de morphismes quasi-finis). Alors le morphisme $f' : X' \rightarrow S'$ déduit de f par changement de base est localement acyclique.

On vérifie en effet que toute variété de cycles évanescents de f' est une variété de cycles évanescents de f .

Lemme 1.5. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme localement acyclique. Pour tout point géométrique t de S , donnant lieu à un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 X_t & \xrightarrow{e'} & X \\
 \downarrow & & \downarrow f \\
 t & \xrightarrow{e} & S
 \end{array}$$

On a $e'_* \mathbb{Z}/n = f^* e_* \mathbb{Z}/n$ et $R^q e'_* \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q > 0$.

Soient \bar{S} l'adhérence de $e(t)$, S' le normalisé de \bar{S} dans $k(t)$, et le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc}
 X_t & \xrightarrow{i'} & X' & \xrightarrow{\alpha'} & X \\
 \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 t & \xrightarrow{i} & S' & \xrightarrow{\alpha} & S
 \end{array}$$

Les anneaux locaux de S' sont normaux à corps de fractions séparablement clos. Ils sont donc strictement henséliens, et l'acyclicité locale de f' (1.4) fournit $i'_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$, $R^q i'_* \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q > 0$. Puisque α est entier, on a alors

$$R^q e'_* \mathbb{Z}/n = \alpha'_* R^q i'_* \mathbb{Z}/n = \alpha'_* f'^* R^q i_* \mathbb{Z}/n = f^* \alpha_* R^q i_* \mathbb{Z}/n = f^* R^q e_* \mathbb{Z}/n,$$

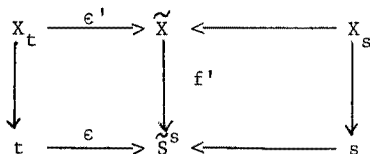
et le lemme.

(1.6) Etant donné un morphisme localement acyclique $f : X \rightarrow S$ et une flèche de spécialisation $t \rightarrow \tilde{S}^s$, nous allons définir des homomorphismes canoniques, dits flèches de cospécialisation

$$\text{cosp}^* : H^*(X_t, \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^*(X_s, \mathbb{Z}/n),$$

reliant la cohomologie de la fibre générale $X_t = X \times_S t$ et celle de la fibre spéciale $X_s = X \times_S s$.

Considérons le diagramme cartésien



déduit de f par changement de base. D'après 1.4, f' est encore localement acyclique. De la définition de l'acyclicité locale, on tire aussitôt que la restriction à X_s des faisceaux $R^q \epsilon'_* \mathbb{Z}/n$ est \mathbb{Z}/n pour $q=0$, et 0 pour $q > 0$. Par 1.5, on sait même que $R^q \epsilon'_* \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q > 0$. On définit cosp^* comme la flèche composée

$$(1.6.1) \quad H^*(X_t, \mathbb{Z}/n) \simeq H^*(X, \epsilon'_* \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^*(X_s, \mathbb{Z}/n) .$$

Variante: Soient \bar{S} l'adhérence de $\epsilon(t)$ dans \tilde{S}^s , S' le normalisé de \bar{S} dans $k(t)$ et X'/S' déduit de X/S par changement de base. Le diagramme (1.6.1) peut encore s'écrire

$$H^*(X_t, \mathbb{Z}/n) \simeq H^*(X', \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^*(X_s, \mathbb{Z}/n) .$$

Théorème (1.7). - Soient S un schéma localement noethérien, s un point géométrique de S et $f : X \rightarrow S$ un morphisme. On suppose

- a) le morphisme f est localement acyclique,
- b) pour tout morphisme de spécialisation $t \rightarrow \tilde{S}^s$ et pour tout $q \geq 0$,

les flèches de cospécialisation $H^q(X_t, \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^q(X_s, \mathbb{Z}/n)$ sont bijectives.

Alors l'homomorphisme canonique $(R^q f_* \mathbb{Z}/n)_s \rightarrow H^q(X_s, \mathbb{Z}/n)$ est bijectif pour tout $q \geq 0$.

Pour démontrer le théorème, il est clair qu'on peut supposer $S = \widetilde{S}^s$. On va en fait montrer que, pour tout faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules F sur S , l'homomorphisme canonique $\varphi^q(F) : (R^q f_* f^* F)_S \rightarrow H^q(X_S, f^* F)$ est bijectif.

Tout faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules est limite inductive filtrante de faisceaux constructibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules (IV.3.3). De plus tout faisceau constructible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules se plonge dans un faisceau de la forme $\prod_{\lambda} i_{\lambda*} C_{\lambda}$, où $i_{\lambda} : \mathfrak{t}_{\lambda} \rightarrow S$ est une famille finie de généralisations de s et C_{λ} un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module libre de rang fini sur \mathfrak{t}_{λ} . D'après la définition des flèches de spécialisation, la condition b) signifie que les homomorphismes $\varphi^q(F)$ sont bijectifs si F est de cette forme.

On conclut à l'aide d'une variante du lemme (IV.3.6):

Lemme (1.8). - Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne dans laquelle les limites inductives filtrantes existent. Soit $\varphi^{\bullet} : T' \rightarrow T''$ un morphisme de foncteurs cohomologiques commutant aux limites inductives filtrantes, définis sur \mathcal{C} et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Supposons qu'il existe deux sous-ensembles \mathcal{D} et \mathcal{E} d'objets de \mathcal{C} tels que:

- a) tout objet de \mathcal{C} est limite inductive filtrante d'objets appartenant à \mathcal{D} ,
- b) tout objet appartenant à \mathcal{D} est contenu dans un objet appartenant à \mathcal{E} .

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\varphi^q(A)$ est bijectif pour tout $q \geq 0$ et tout $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$.
- (ii) $\varphi^q(M)$ est bijectif pour tout $q \geq 0$ et tout $M \in \mathcal{E}$.

La démonstration du lemme se fait par passage à la limite inductive, récurrence sur q et application répétée du lemme des cinq au diagramme de suites exactes de cohomologie déduit d'une suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow A' \rightarrow 0$, avec $A \in \mathcal{D}$, $M \in \mathcal{E}$, $A' \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

Corollaire (1.9). - Soient S le spectre d'un anneau local noethérien strictement hensélien et $f : X \rightarrow S$ un morphisme localement acyclique. Supposons que, pour tout

point géométrique t de S on ait $H^0(X_t, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$ et $H^q(X_t, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q > 0$ [autrement dit les fibres géométriques de f sont acycliques]. Alors on a $f_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$ et $R^q f_* \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q > 0$.

Corollaire (1.10). - Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des morphismes de schémas localement noethériens. Alors, si f et g sont localement acycliques, il en est de même de $g \circ f$.

On peut supposer que X, Y et Z sont strictement locaux et que f et g sont des morphismes locaux. Il s'agit alors de montrer que, si z est un point géométrique algébrique de Z , on a $H^0(X_z, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$ et $H^q(X_z, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q > 0$.

Puisque g est localement acyclique, on a $H^0(Y_z, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$, et $H^q(Y_z, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q > 0$. Par ailleurs le morphisme $f_z : X_z \rightarrow Y_z$ est localement acyclique (1.4) et ses fibres géométriques sont acycliques, car ce sont des variétés de cycles évanescents de f . D'après (1.9), on a donc $R^q f_{z*} \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q > 0$. De plus $f_{z*} \mathbb{Z}/n$ est constant de fibre \mathbb{Z}/n sur Y_z . On conclut à l'aide de la suite spectrale de Leray de f_z .

2. Acyclicité locale d'un morphisme lisse.

Théorème (2.1). - Un morphisme lisse est localement acyclique.

Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme lisse. L'assertion est locale pour la topologie étale sur X et S , on peut donc supposer que X est l'espace affine type de dimension d sur S . Par passage à la limite, on peut supposer que S est noethérien et la transitivité de l'acyclicité locale (1.10) montre qu'il suffit de traiter le cas $d = 1$.

Soient s un point géométrique de S et x un point géométrique de X centré en un point fermé de X_s . Il s'agit de montrer que les fibres géométriques du morphisme $\tilde{X}^x \rightarrow \tilde{S}^s$ sont acycliques. On posera désormais $S = \tilde{S}^s = \text{Spec}(A)$ et $X = \tilde{X}^x$. On a $X \simeq \text{Spec } A\{T\}$, où $A\{T\}$ est l'hensélisé de $A[T]$ au point $T = 0$ au-dessus de s .

Si t est un point géométrique de S , la fibre X_t est limite projective de courbes affines et lisses sur t . On a donc $H^q(X_t, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q \geq 2$ et il suffit de montrer que $H^0(X_t, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$ et $H^1(X_t, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour n premier à la caractéristique résiduelle de S . Cela résulte des deux propositions suivantes.

Proposition (2.2). - Soient A un anneau local strictement hensélien, $S = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec } A\{T\}$. Alors les fibres géométriques de $X \rightarrow S$ sont connexes.

On peut se ramener par passage à la limite au cas où A est un hensélisé strict d'une \mathbb{Z} -algèbre de type fini.

Soient \bar{t} un point géométrique de S , localisé en t , et k' une extension finie séparable de $k(t)$ dans $k(\bar{t})$. On pose $t' = \text{Spec}(k')$ et $X_{t'} = X \times_S \text{Spec}(k')$. Il nous faut vérifier que, quels que soient \bar{t} et t' , $X_{t'}$ est connexe (par quoi on entend connexe et non vide). Soit A' le normalisé de A dans k' , i.e. l'anneau des éléments de k' entiers sur l'image de A dans $k(t)$. On a $A\{T\} \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} A'\{T\}$: le membre de gauche est en effet hensélien local (car A' est fini sur A , et local) et limite d'algèbres locales étale sur $A'\{T\} = A\{T\} \otimes_A A'$. Le schéma $X_{t'}$ est donc encore la fibre en t' de $X' = \text{Spec}(A'\{T\})$ sur $S' = \text{Spec}(A')$. Le schéma local X' est normal, donc intègre; son localisé $X_{t'}$ est encore intègre, a fortiori connexe.

Proposition (2.3). - Soient A un anneau local strictement hensélien, $S = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(A\{T\})$. Soient \bar{t} un point géométrique de S et $X_{\bar{t}}$ la fibre géométrique correspondante. Alors tout revêtement étale galoisien de $X_{\bar{t}}$ d'ordre premier à la caractéristique du corps résiduel de A est trivial.

Lemme (2.3.1) (théorème de pureté de Zariski-Nagata en dimension 2). - Soient C un anneau local régulier de dimension 2 et C' une C-algèbre finie normale étale au-dessus de l'ouvert complémentaire du point fermé de $\text{Spec}(C)$. Alors C' est étale sur C .

En effet C' est normal de dimension 2, donc $\text{prof}(C') = 2$. Puisque $\text{prof}(C') + \dim \text{proj}(C') = \dim(C) = 2$, on en conclut que C' est libre sur C . Alors l'ensemble des points de C où C' est ramifié est défini par une équation, le discriminant; puisqu'il ne contient pas de point de hauteur 1, il est vide.

Lemme (2.3.2) (cas particulier du lemme d'Abhyankar). - Soient $S = \text{Spec}(V)$ un trait, π une uniformisante, η le point générique de S , X lisse sur S , irréductible, de dimension relative 1, \tilde{X}_{η} un revêtement étale galoisien de X_{η} , de degré n inversible sur S , et $S_1 = \text{Spec}(V[\pi^{1/n}])$. Notons par un indice 1 le changement de base de S à S_1 . Alors, $\tilde{X}_{1\eta}$ se prolonge en un revêtement étale de X_1 .

Soit \tilde{X}_1 le normalisé de X_1 dans $\tilde{X}_{1\eta}$. Vu la structure des groupes d'inertie modérée des anneaux de valuation discrète localisés de X aux points génériques de la fibre spéciale X_s , \tilde{X}_1 est étale sur X_1 sur la fibre générale, et aux points génériques de la fibre spéciale. Par 2.3.1, il est étale partout.

2.3.3. Prouvons 2.3. Notons t le point en lequel \bar{t} est localisé. Il nous est loisible de remplacer A par le normalisé de A dans une extension finie séparable $k(t')$ de $k(t)$ dans $k(\bar{t})$ (cf. 2.2). Ceci, et un passage à la limite préliminaire,

nous permettent de supposer que

- a) A est normal noethérien, et t est le point générique de S .
- b) Le revêtement étale considéré de X_t provient d'un revêtement étale de X_t .
- c) Il provient d'un revêtement étale \tilde{X}_U de l'image réciproque X_U d'un ouvert non vide U de S (résulte de b): t est la limite des U).
- d) Le complément de U est de codimension ≥ 2 (ceci au prix d'agrandir $k(t)$, par application de 2.3.2 aux anneaux de valuation discrète localisés de S en les points de $S-U$ de codimension 1 dans S ; ces points sont en nombre fini).
- e) Le revêtement \tilde{X}_U est trivial au-dessus du sous-schéma $T=0$. (Ceci quitte à encore agrandir $k(t)$).

Lorsque ces conditions sont remplies, nous allons voir que le revêtement \tilde{X}_U est trivial.

Lemme (2.3.4). - Soient A un anneau local strictement hensélien normal et noethérien, U un ouvert de $\text{Spec}(A)$ dont le complément est de codimension ≥ 2 , V son image réciproque dans $X = \text{Spec}(A\{T\})$ et V' un revêtement étale de V . Si V' est trivial au-dessus de $T = 0$, alors V' est trivial.

Soit $B = \Gamma(V', \mathcal{O})$. Puisque V' est l'image inverse de V dans $\text{Spec}(B)$, il suffit de voir que B est fini étale sur $A\{T\}$ (donc décomposé, puisque $A\{T\}$ est strictement hensélien). Soit $\hat{X} = A[[T]]$, et notons par $\hat{}$ le changement de base de X à \hat{X} . Le schéma \hat{X} est fidèlement plat sur X . On a donc $\Gamma(\hat{V}', \mathcal{O}) = B \otimes_{A\{T\}} A[[T]]$, et il suffit de voir que cet anneau \hat{B} est fini étale sur $A[[T]]$.

Soit V_m (resp. V'_m) le sous-schéma de \hat{V} (resp. \hat{V}') d'équation $T^{m+1} = 0$. Par hypothèse, V'_0 est un revêtement trivial de V_0 : une somme de n -copies de V_0 . De même pour V'_m/V_m , puisque les revêtements étales sont insensibles aux nilpotents. On en tire

$$\varphi : \Gamma(\hat{V}', \mathcal{O}) \rightarrow \varprojlim_m \Gamma(V'_m, \mathcal{O}) = (\varprojlim_m \Gamma(V_m, \mathcal{O}))^n .$$

Par hypothèse, le complément de U est de profondeur ≥ 2 : on a

$\Gamma(V_m, \mathcal{O}) = A[[T]]/(T^{m+1})$, et φ est un homomorphisme de \hat{B} dans $A[[T]]^n$.

Au-dessus de U , il fournit n sections distinctes de \hat{V}'/\hat{V} : \hat{V}' est donc trivial, somme de n copies de \hat{V} . Le complément de \hat{V} dans \hat{X} étant encore de codimension ≥ 2 (donc de profondeur ≥ 2), on en déduit que $\hat{B} = A[[T]]^n$, d'où le lemme.

3. Applications.

Théorème (3.1) (spécialisation des groupes de cohomologie). -

Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme propre et localement acyclique, par exemple un morphisme propre et lisse. Alors les faisceaux $R^q f_* \mathbb{Z}/n$ sont localement constants constructibles et pour toute flèche de spécialisation $t \rightarrow \tilde{S}^s$, les flèches de co-spécialisation $H^q(X_t, \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^q(X_s, \mathbb{Z}/n)$ sont bijectives.

Cela résulte immédiatement de la définition des flèches de co-spécialisation et des théorèmes de finitude et de changement de base pour les morphismes propres.

Théorème (3.2) (changement de base par un morphisme lisse). - Soit un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{g'} & X \\
 \downarrow f' & & \downarrow f \\
 S' & \xrightarrow{g} & S
 \end{array}$$

avec g lisse. Pour tout faisceau F sur X, de torsion et premier aux caractéristiques résiduelles de S, on a

$$g_* R^q_{f_*} F \xrightarrow{\sim} R^q_{f'_*} (g'^* F) .$$

En prenant un recouvrement ouvert de X, on se ramène au cas où X est affine, puis par un passage à la limite au cas où X est de type fini sur S. Alors f se factorise en une immersion ouverte $j : X \rightarrow \bar{X}$ et un morphisme propre $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow S$. De la suite spectrale de Leray pour $\bar{f} \circ j$ et du théorème de changement de base pour les morphismes propres, on déduit qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $X \rightarrow S$ est une immersion ouverte.

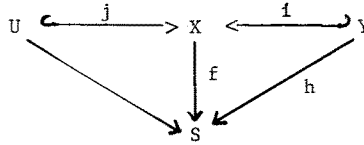
Dans ce cas, si F est de la forme $\epsilon_* C$, où $\epsilon : t \rightarrow X$ est un point géométrique de X, le théorème est corollaire de 1.5. Le cas général en résulte par le lemme 1.8.

Corollaire (3.3). - Soient K/k une extension de corps séparablement clos, X un k-schéma et n un entier premier à la caractéristique de k. Alors l'application canonique $H^q(X, \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^q(X_K, \mathbb{Z}/n)$ est bijective pour tout $q \geq 0$.

Il suffit de remarquer que \bar{K} est limite inductive de \bar{k} -algèbres lisses.

Théorème (3.4) (pureté relative). - Soit un diagramme commutatif

(3.4.1)

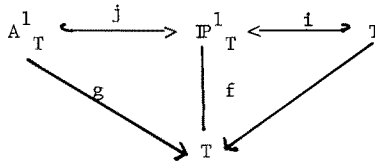


avec f lisse purement de dimension relative N , h lisse purement de dimension relative $N-1$, i un plongement fermé et $U = X-Y$. Pour n premier aux caractéristiques résiduelles de S , on a

$$\begin{cases}
 j_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n \\
 R^1 j_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n(-1)_Y \\
 R^q j_* \mathbb{Z}/n = 0 \text{ pour } q \geq 2
 \end{cases}$$

Dans ces formules, $\mathbb{Z}/n(-1)$ désigne le \mathbb{Z}/n -dual de μ_n . Si t est une équation locale pour Y , l'isomorphisme $R^1 j_* \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/n(-1)_Y$ est défini par l'application $a : \mathbb{Z}/n \rightarrow R^1 j_* \mu_n$ qui envoie 1 sur la classe du μ_n -torseur des racines $n^{\text{ièmes}}$ de t .

La question est de nature locale. Ceci permet de remplacer (X, Y) par un couple localement isomorphe, par exemple



avec $T = A_S^{n-1}$ et $i =$ section à l'infini. Le corollaire 1.9 s'applique à g , et fournit $R^q g_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$ pour $q=0$, 0 pour $q > 0$. Pour f , on a par ailleurs (IV 6.2.1)

$$R^q f_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n, 0, \mathbb{Z}/n(-1), 0 \text{ pour } q > 2.$$

On vérifie facilement que $j_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$, et que les $R^q j_* \mathbb{Z}/n$ sont concentrés sur $i(T)$ pour $q > 0$. La suite spectrale de Leray

$E_2^{Pq} = R^P f_* R^q j_* \mathbb{Z}/n \Rightarrow R^{P+q} g_* \mathbb{Z}/n$ se réduit donc à

$$\begin{array}{ccccccc}
 i^* R^q j_* \mathbb{Z}/n & 0 & \dots & & & & \\
 i^* R^1 j_* \mathbb{Z}/n & 0 & \dots & \nearrow d_2 & & & \\
 \mathbb{Z}/n & 0 & \mathbb{Z}/n(-1) & 0 & \dots & & :
 \end{array}$$

$R^q j_* \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q \geq 2$, et $R^1 j_* \mathbb{Z}/n$ est le prolongement par zéro d'un faisceau localement libre de rang un sur T (isomorphe, via d_2 , à $\mathbb{Z}/n(-1)$). L'application a , définie plus haut, étant injective (ainsi qu'on le vérifie fibre par fibre), c'est un isomorphisme, et ceci prouve 3.4.

3.5. Nous renvoyons à SGA 4 XVI (§ 4 et § 5) pour la démonstration des applications suivantes du théorème d'acyclicité (2.1).

(3.5.1) Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas de type fini sur \mathbb{C} et F un faisceau constructible sur X . Alors

$$(R^q f_* F)^{an} \sim R^q f_*^{an}(F^{an})$$

(cf IV 6.3; en cohomologie ordinaire, il est nécessaire de supposer F constructible et non seulement de torsion).

(3.5.2) Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas de type fini sur un corps k de caractéristique 0 et F un faisceau constructible sur X . Alors, les $R^q f_* F$ sont également constructibles.

La preuve utilise la résolution des singularités et 3.4. Elle est généralisée au cas d'un morphisme de type fini de schémas excellents de caractéristique 0 dans SGA4 XIX §5. Une autre démonstration, indépendante de la résolution, est donnée dans ce volume (Th. finitude, 1.1), elle s'applique à un morphisme de schémas de type fini sur un corps ou sur un anneau de Dedekind.

VI. Dualité de Poincaré

1. Introduction

Soit X une variété topologique orientée, purement de dimension N , et supposons que X admette un recouvrement ouvert fini $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq K}$, tel que les intersections non vides d'ouverts U_i soient homéomorphes à des boules.

Pour une telle variété, le théorème de dualité de Poincaré peut se présenter ainsi:

A. La cohomologie de X est la cohomologie de Čech correspondant au revêtement \mathcal{U} .
 C'est la cohomologie du complexe

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}^{A_0} \rightarrow \mathbb{Z}^{A_1} \rightarrow \dots$$

où $A_k = \{(i_0, \dots, i_k) \mid i_0 < \dots < i_k \text{ et } U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset\}$.

B. Pour $a \in A_k$, $a = (i_0, \dots, i_k)$, soit $U_a = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$ et soit j_a

l'inclusion de U_a dans X . Le faisceau constant \mathbb{Z} sur X admet la résolution (à gauche)

$$(2) \quad \dots \rightarrow \bigoplus_{a \in A_1} j_{a!} \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{a \in A_0} j_{a!} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

\downarrow
 \mathbb{Z}

La cohomologie à support compact $H_c^i(X, j_{a!} \mathbb{Z})$ n'est autre que la cohomologie à support propre de la boule (orientée) U_a :

$$H_c^i(X, j_{a!} \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq N \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = N \end{cases}$$

La suite spectrale d'hypercohomologie, pour le complexe (2) et la cohomologie à support propre, affirme donc que $H_c^i(X)$ est le $(i-N)$ -ième groupe de cohomologie d'un complexe

$$(3) \quad \dots \rightarrow \mathbb{Z}^{A_1} \rightarrow \mathbb{Z}^{A_0} \rightarrow 0 \quad .$$

Ce complexe est le dual du complexe (1), d'où la dualité de Poincaré.

Les points essentiels de cette construction sont

- a) l'existence d'une théorie de cohomologie à support propre :
- b) le fait que tout point x d'une variété X purement de dimension N a un système fondamental de voisinages ouverts U pour lesquels

$$(4) \quad H_c^i(U) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq N \text{ ,} \\ \mathbb{Z} & \text{pour } i = N \text{ .} \end{cases}$$

La dualité de Poincaré en cohomologie étale peut se construire sur ce modèle. Pour X lisse purement de dimension N sur k algébriquement clos, n inversible sur X et x un point fermé de X , le point clef est de calculer la limite projective, étendue aux voisinages étales U de x

$$(5) \quad \varprojlim H_c^i(U, \mathbb{Z}/n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 2N \\ \mathbb{Z}/n & \text{si } i = 2N \text{ .} \end{cases}$$

De même que pour les variétés topologiques il faut d'abord traiter directement le cas d'une boule ouverte (voire simplement celui de l'intervalle $]0, 1[$), ici il faut d'abord traiter directement le cas des courbes (§2). Le théorème d'acyclicité locale des morphismes lisses permet ensuite de ramener (5) à ce cas particulier (§3).

Les isomorphismes (4) et (5) ne sont pas canoniques: ils dépendent du choix d'une orientation de X . Pour n inversible sur un schéma X , μ_n est un faisceau de \mathbb{Z}/n -modules libres de rang un. On note $\mathbb{Z}/n(N)$ sa puissance tensorielle $N^{\text{ième}}$ ($N \in \mathbb{Z}$). La forme intrinsèque de la deuxième ligne de (5) est

$$(5') \quad \varprojlim H_c^{2N}(U, \mathbb{Z}/n(N)) = \mathbb{Z}/n \quad ,$$

et $\mathbb{Z}/n(N)$ s'appelle le faisceau d'orientation de X ; le faisceau $\mathbb{Z}/n(N)$ étant constant, isomorphe à \mathbb{Z}/n , on peut le faire sortir du signe H et écrire plutôt

$$(5'') \quad \varprojlim H_c^{2N}(U, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n(-N) \quad ,$$

et la dualité de Poincaré prendra la forme d'une dualité parfaite, à valeurs dans $\mathbb{Z}/n(-N)$, entre $H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ et $H_c^{2N-1}(X, \mathbb{Z}/n)$.

2. Le cas des courbes.

(2.1) Soient \bar{X} une courbe projective et lisse sur k algébriquement clos, et n inversible sur \bar{X} . La preuve de III 3.5 fournit, pour \bar{X} connexe, un isomorphisme canonique

$$H^2(\bar{X}, \mu_n) = \text{Pic}(\bar{X})/n\text{Pic}(\bar{X}) \xrightarrow{\sim \text{deg}} \mathbb{Z}/n \quad .$$

Soient D un diviseur réduit de \bar{X} et $X = \bar{X} - D$

$$X \xleftarrow{j} \bar{X} \xleftarrow{i} D \quad .$$

La suite exacte $0 \rightarrow j_! \mu_n \rightarrow \mu_n \rightarrow i_* \mu_n \rightarrow 0$ et le fait que

$H^i(\bar{X}, i_* \mu_n) = H^i(D, \mu_n) = 0$ pour $i > 0$ fournissent un isomorphisme

$$H_c^2(X, \mu_n) = H^2(\bar{X}, j_! \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^2(\bar{X}, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n \quad .$$

Pour \bar{X} disconnexe, on a de même

$$H_c^2(X, \mu_n) \simeq (\mathbb{Z}/n)^{\pi_0(X)}$$

et on définit le morphisme trace comme la somme

$$\text{Tr} : H_c^2(X, \mu_n) \simeq (\mathbb{Z}/n)^{\pi_0(X)} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}/n \quad .$$

Théorème (2.2). - La forme $\text{Tr}(a \cup b)$ identifie chacun des deux groupes $H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ et $H_c^{2-i}(X, \mu_n)$ au dual (à valeurs dans \mathbb{Z}/n) de l'autre.

Preuve transcendantale. Si \bar{X} est une courbe projective et lisse sur un trait S , et que $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ est l'inclusion du complémentaire d'un diviseur D étale sur S , les cohomologies (resp. les cohomologies à support propre) des fibres géométriques spéciales et génériques de X/S sont "les mêmes", i.e. les fibres de faisceaux localement constants sur S . Ceci se déduit des faits analogues pour \bar{X} et D , via la suite exacte $0 \rightarrow j_! \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/n_D \rightarrow 0$ (pour la cohomologie à supports propres) et les formules $j_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$, $R^1 j_* \mathbb{Z}/n \simeq \mathbb{Z}/n_D(-1)$, $R^i j_* \mathbb{Z}/n = 0$ ($i \geq 2$) (pour la cohomologie ordinaire) (V 3.4).

Ce principe de spécialisation ramène 2.2 au cas où k est de caractéristique 0. Par V 3.3, ce cas se ramène à celui où $k = \mathbb{C}$. Enfin, pour $k = \mathbb{C}$, les groupes $H^*(X, \mathbb{Z}/n)$ et $H_c^*(X, \mu_n)$ coïncident avec les groupes de même nom, calculés pour l'espace topologique classique X_{c1} et, via l'isomorphisme $\mathbb{Z}/n \rightarrow \mu_n : x \mapsto \exp(\frac{2\pi i x}{n})$, le morphisme trace s'identifie à "l'intégration sur la classe fondamentale", de sorte que 2.2 résulte de la dualité de Poincaré pour X_{c1} .

(2.3) Preuve algébrique. Pour une preuve très économique, voir (Dualité §2). En voici une autre, liée à l'autodualité de la jacobienne.

Reprenons les notations de 2.1. On peut supposer - et on suppose - que X est connexe. Les cas $i=0$ ou 2 étant triviaux, on suppose aussi que $i=1$. Définissons ${}_D \mathbb{G}_m$ par la suite exacte $0 \rightarrow {}_D \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow i_* \mathbb{G}_m \rightarrow 0$ (sections de \mathbb{G}_m congrues à 1 mod D). Le groupe $H^1(\bar{X}, {}_D \mathbb{G}_m)$ classifie les faisceaux inversibles sur \bar{X} trivialisés sur D . C'est le groupe des points de $\text{Pic}_D(\bar{X})$, une extension de \mathbb{Z} (le degré) par le groupe des points d'une jacobienne généralisée de Rosenlicht (correspondant au conducteur 1 en chaque point de D) $\text{Pic}_D^0(\bar{X})$, elle-même extension de la variété abélienne $\text{Pic}^0(\bar{X})$ par le tore $\mathbb{G}_m^D / (\mathbb{G}_m \text{ diagonal})$.

a) La suite exacte $0 \rightarrow j_! \mu_n \rightarrow_D \mathbb{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{G}_m \rightarrow 0$ fournit un isomorphisme

$$(2.3.1) \quad H_c^1(X, \mu_n) = \text{Pic}_D^0(\bar{X})_n .$$

b) L'application qui à $x \in X(k)$ associe la classe du faisceau inversible $\mathcal{O}(x)$ sur \bar{X} , trivialisé par 1 sur D , provient d'un morphisme

$$f : X \longrightarrow \text{Pic}_D(\bar{X}) .$$

Pour la suite, on fixe un point base 0 et on pose $f_0(x) = f(x) - f(0)$.

Pour tout homomorphisme $v : \text{Pic}_D^0(\bar{X})_n \rightarrow \mathbb{Z}/n$, soit $\bar{v} \in H^1(\text{Pic}_D^0(\bar{X}), \mathbb{Z}/n)$

l'image par v de la classe dans $H^1(\text{Pic}_D^0(\bar{X}), \text{Pic}_D^0(\bar{X})_n)$ du torseur défini par l'extension

$$0 \rightarrow \text{Pic}_D^0(\bar{X})_n \rightarrow \text{Pic}_D^0(\bar{X}) \xrightarrow{-n} \text{Pic}_D^0(\bar{X}) \rightarrow 0$$

La théorie du corps de classe géométrique (telle qu'exposée dans Serre [15]) montre que l'application $v \mapsto f_0^*(\bar{v})$:

$$(2.3.2) \quad \text{Hom}(\text{Pic}_D^0(\bar{X})_n, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/n)$$

est un isomorphisme. Pour déduire 2.2 de (2.3.1) (2.3.2), il reste à savoir que

$$(2.3.3) \quad \text{Tr}(u \cup f_0^*(\bar{v})) = -v(u) .$$

Cette compatibilité est prouvée en (Dualité, 3.2.4).

3. Le cas général.

Soient X une variété algébrique lisse et purement de dimension N , sur k algébriquement clos. Pour énoncer le théorème de dualité de Poincaré, il faut tout d'abord définir le morphisme trace

$$\text{Tr} : H_c^{2N}(X, \mathbb{Z}/n(N)) \rightarrow \mathbb{Z}/n .$$

La définition est un dévissage pénible à partir du cas des courbes (SGA 4 XVIII

§ 2). On a alors

Théorème (3.1). - La forme $\text{Tr}(a \cup b)$ identifie chacun des groupes $H_c^i(X, \mathbb{Z}/n(N))$ et $H^{2N-i}(X, \mathbb{Z}/n)$ au dual de l'autre.

Soient $x \in X$ un point fermé et X_x le localisé strict de X en x .
Nous posons, pour U parcourant les voisinages étales de x

$$(1) \quad H_c^*(X_x, \mathbb{Z}/n) = \varprojlim H_c^*(U, \mathbb{Z}/n) .$$

Il serait préférable de considérer plutôt le pro-objet " \varprojlim " $H_c^*(U, \mathbb{Z}/n)$ mais, les groupes en jeu étant finis, la différence est inessentielle. Comme on a tenté de l'expliquer dans l'introduction, (3.1) résulte de ce que

$$(2) \quad H_c^i(X_x, \mathbb{Z}/n) = 0 \text{ pour } i \neq 2N \text{ et que}$$

$$\text{Tr}: H_c^{2N}(X_x, \mathbb{Z}/n(N)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n \text{ est un isomorphisme.}$$

Le cas où $N=0$ est trivial. Si $N > 0$, soit Y_y le localisé strict en un point fermé d'un schéma Y lisse purement de dimension $N-1$, et soit $f: X_x \rightarrow Y_y$ un morphisme essentiellement lisse (de dimension relative un). La démonstration utilise la suite spectrale de Leray en cohomologie à support propre pour f , pour se ramener au cas des courbes. Les "cohomologies à support propre" considérées étant définies comme des limites (1), l'existence d'une telle suite spectrale pose divers problèmes de passage à la limite, traités avec trop de détails dans SGA4 XVIII. Ici, nous nous contenterons de calculer.

Pour tout point géométrique z de Y_y , on a

$$(R^i f_! \mathbb{Z}/n)_z = H_c^i(f^{-1}(z), \mathbb{Z}/n) .$$

La fibre géométrique $f^{-1}(z)$ est une limite projective de courbes lisses sur un corps algébriquement clos. Elle vérifie la dualité de Poincaré. Sa cohomologie ordinaire est donnée par le théorème d'acyclicité locale pour les morphismes lisses:

$$H^i(f^{-1}(z), \mathbb{Z}/n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n & \text{pour } i = 0 \\ 0 & \text{pour } i > 0 \end{cases} .$$

Par dualité, on a

$$H_c^i(f^{-1}(z), \mathbb{Z}/n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n(-1) & \text{pour } i = 2 \\ 0 & \text{pour } i \neq 2 \end{cases} ,$$

et la suite spectrale de Leray s'écrit

$$H_c^i(X_x, \mathbb{Z}/n(N)) = H_c^{i-2}(Y_y, \mathbb{Z}/n(N-1)) .$$

On conclut par récurrence sur N .

4. Variantes et applications.

On peut construire, en cohomologie étale, un "formalisme de dualité" (= des foncteurs Rf_* , $Rf_!$, f^* , $Rf^!$ satisfaisant diverses compatibilités et formules d'adjonction) parallèle à celui qui existe en cohomologie cohérente. Dans ce langage, les résultats du paragraphe précédents se transcrivent comme suit: si $f : X \rightarrow S$ est lisse et purement de dimension relative N , et que $S = \text{Spec}(k)$, avec k algébriquement clos, alors

$$Rf^! \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n[2N](N) .$$

Ce résultat vaut sans hypothèse sur S . Il admet le

Corollaire. - Si f est lisse et purement de dimension relative N , et que les faisceaux $R^i f_! \mathbb{Z}/n$ sont localement constants, alors les faisceaux $R^i f_* \mathbb{Z}/n$ sont aussi localement constants, et

$$R^i f_* \mathbb{Z}/n = \underline{\text{Hom}}(R^{2N-i} f_! \mathbb{Z}/n(N), \mathbb{Z}/n) .$$

En particulier, sous les hypothèses du corollaire, les faisceaux

$R^i f_* \mathbb{Z}/n$ sont constructibles. Partant de là, on peut montrer que, si S est de type fini sur le spectre d'un corps ou d'un anneau de Dedekind, alors, pour tout morphisme de type fini $f : X \rightarrow S$ et tout faisceau constructible \mathcal{F} sur X , les faisceaux $R^i f_* \mathcal{F}$ sur S sont constructibles (Th. finitude, 1.1).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN. Grothendieck topologies (notes mimeographiées), Harvard University, 1962.
- [2] M. ARTIN. Algebraic approximation of structures over complete local rings, Pub. Math. I.H.E.S., n° 36, 1959, p. 25-58.
- [3] M. ARTIN. Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques (chap. VII, le théorème de finitude en cohomologie étale), Presses de l'Université de Montréal, 1973 .
- [4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L. VERDIER. Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas, SGA 4, Lecture notes in Maths., n° 269, 270 et 305, Springer, 1972/73.
- [5] J. GIRAUD. Analysis situs (d'après Artin et Grothendieck). Séminaire Bourbaki, 1962/63, exp. 266.
- [6] A. GROTHENDIECK. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats. Séminaire Bourbaki, 1959/60, exp. 190.
- [7] A. GROTHENDIECK. Revêtements Etale et Groupe Fondamental, SGA 1, Lecture notes in Maths., n° 224, Springer, 1971.
- [8] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ. Eléments de géométrie algébrique, Pub. Math. I.H.E.S., n° 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1960/67 [cité EGA].
- [9] M. NAGATA. Imbedding of an abstract variety in a complete variety, J. Math. Kyoto Univ., 2-1, 1962, p. 1-10.
- [10] M. NAGATA. Generalisation of the imbedding problem, J. Math. Kyoto Univ., 3-1, 1963, p. 89-102.
- [11] M. RAYNAUD. Anneaux Locaux Henséliens, Lecture notes in Maths., n° 169, Springer, 1970.

- [12] J.-P. SERRE. Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique, Ann. de l'Institut Fourier, t. VI, 1956, p. 1-12 (cité GAGA).
- [13] J.-P. SERRE. Corps Locaux, Paris, Hermann, 1968.
- [14] J.-P. SERRE. Cohomologie galoisienne, Lecture notes in Maths., n° 5, Springer, 1965.
- [15] J.-P. SERRE. Groupes algébriques et corps de classes, Paris, Hermann, 1959.
- [16] C. TSEN. Divisionsalgebren über Funktionenkörper, Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 1933, p. 335-339.