دورهای تحلیلی روی خمینه‌های مختلط

سام نریمان *

مقدمه

سال ۱۹۶۱ مایکل اتیا[1] و فردریش هیتزبروخ[2] برای این که کلاس دوری در همولوژی تحلیلی باشد، شرط توپولوژیک پیدا کردند. برای اینکه دوری تحلیلی باشد، می‌بایست شرط بدیهی ارضا شود که منجر به حدس هاج خواهد شد. در بخش صفر شرطی از هندسه مختلط که از نظریه هاج تحمیل می‌شود را بررسی خواهیم کرد، اما بخش اعظم مقاله را به ایده‌های اصلی مانع توپولوژیک[3] تحلیلی بودن دور اختصاص خواهیم داد.

فرض کنید X خمینه مختلط و Y زیرفضای بسته، تحویل‌ناپذیر، k بعدی، تحلیلی مختلط از X باشد. در این صورت Y کلاس همولوژی با ضریب صحیح از بعد ۲k در X خواهد بود. دور تحلیلی یک ترکیب خطی متناهی صوری، $\sum n_iY_i$ است که n_i عدد صحیح و Y_i مانند بالا تعریف شده است. کلاس همولوژی این دور را با $\sum n_iy_i$ نشان می‌دهیم. اگر کلاس کوهمولوژی u دوگان پوانکاره کلاس همولوژی

---

* این تحقیق با حمایت مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی زیرنظر دکتر مهرداد شهشهانی انجام شد.

1) M. Atiyah 2) F. Hirzebruch 3) topological obstruction

تحلیلی باشد، می‌گوییم u کلاس کوهمولوژی تحلیلی است. می‌خواهیم در این مقاله مانعی توپولوژیک برای تحلیلی بودن u پیدا کنیم. این شرط‌ها عملگرهای کوهمولوژی مشخصی هستند که می‌باید روی u صفر شوند، به عنوان مثال $Sq^{۳}u = ۰$. توجه کنید Y_i می‌توانند تکینگی داشته باشند که در صورتی که شرط زیرخمینه بودن را اضافه کنیم رنه توم[1] [۶] ثابت کرد که می‌بایست برای هر k، $Sq^{۲k+۱}u = ۰$.

اگر X خمینه کهلر[2] باشد، شرط لازم برای تحلیلی مختلط بودن کلاس کوهمولوژی $u \in H^{۲q}(X, \mathbb{Z})$، باشد این است که می‌بایست در تجزیهٔ هاج[3] از نوع (q, q) باشد. هاج حدس زد که اگر X خمینه افکنشی جبری باشد این شرط کافی نیز هست. برای $q \geq ۲$ در این مقاله توضیح خواهیم داد که حدس با این کلیت برقرار نیست. اما ممکن است با ضرایب در $\mathbb{Q}$ درست باشد.

۰ درآمدی بر حدس هاج

قبل از پرداختن به موضوع اصلی که پیدا کردن مانع توپولوژیک برای تحلیلی بودن دور است، لازم است کمی در باره حدس هاج صحبت کنیم. فرض کنید X یک خمینه کهلر باشد، در این صورت با استفاده از تجزیه هاج داریم:

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

در بالا $H^{p,q}(X)$ کلاس فرم های هارمونیک از نوع (p, q)[4] است.

فرض کنید Z زیرخمینه مختلط از X باشد و $i : Z \to X$ نگاشت شمول باشد. فرم (p, q) دلخواه α را می‌توان با واکشیدن[5] به روی Z انتگرال گرفت. حول نقطه‌ی دلخواه از Z می‌توان مختصات $z_۱, \ldots, z_n$ را انتخاب کرد که موضعاً Z با معادلات $z_{k+۱} = \cdots = z_n = ۰$ داده شود. اگر $p > k$،

---

[1] René Thom [2] Kähler Manifold [3] Hodge decomposition

[4] کلاس‌های کوهمولوژی که در پایه مختلطی مثل $z_۱, \ldots, z_n$ نمایشی از ترکیب خطی فرم‌های دیفرانسیلی که از ضرب یک تابع هارمونیک در $dz_{i_۱} \wedge \ldots dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_۱} \ldots d\bar{z}_{j_q}$ بدست می‌آید، تولید می‌شوند.

[5] pullback

در اینصورت می‌بایست α شامل dz_i خواهد بود که z_i به صفر واکشیده می‌شود. بطور مشابه‌اگر $q > k$ نیز α به صفر واکشیده می‌شوند. پس اگر $(p, q) \neq (k, k)$ انتگرال صفر می‌شود.

از طرفی مقدار انتگرال برابر ضرب کمانی[۱] کلاس همولوژی Z با α است. اگر دوگان پوانکاره Z را با $[Z]$ نشان دهیم، این انتگرال را می‌توان با اثر دادن ضرب ناوی[۲] $[Z]$ و α روی کلاس اساسی X نیز بدست آورد. با توجه به محاسبه بالا اگر $[Z]$ را درکلاس از نوع $(p, q) \neq (k, k)$ ضرب ناوی کنیم، صفر حاصل می‌شود. چون تجزیه هاج در بیشترین درجه بدیهی است، یعنی $H^{۲n}(X, \mathbb{C}) = H^{n,n}(X)$، کلاس کوهمولوژی $[Z]$ می‌بایست از نوع $(n-k, n-k)$ باشد. حال سوال طبیعی که هاج مطرح کرده است این است که **کدام کلاس‌های کوهمولوژی در $H^{k,k}(X)$ از دوگان زیرخمینه مختلط Z القا می‌شود؟**

کلاس‌های کوهمولوژیی که درگروه $H^{۲k}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{k,k}(X)$ قرار دارند راکلاس هاج می‌نامیم.

حدس هاج: هر کلاس هاج در خمینه افکنشی مختلط X از ترکیب خطی با ضرایب گویا از کلاس‌های کوهمولوژیی که از زیرخمینه‌های مختلط القا می‌شود، بدست می‌آید.

ابتدا این حدس با ضرایب در $\mathbb{Z}$ بود که در این مقاله با استفاده از ایده‌های اتیا و هیتزبروخ مثال نقضی در رد حدس در این حالت خواهیم ساخت.

اولین نتیجه شاخص در راستای حدس هاج منصوب به لفشتز[۳] است.

قضیه کلاس $(۱, ۱)$-لفشتز: هر عضو $H^{۲}(X, \mathbb{Z}) \cap H^{۱,۱}(X)$ از ترکیب خطی با ضرایب صحیح ازکلاس‌های کوهمولوژیی که از زیرخمینه‌های مختلط با نقص بعد ۱ القا می‌شود، بدست می‌آید.

اثبات ساده‌ای با استفاده ازکوهمولوژی بافه[۴] وجود دارد.

---

1) cap product 2) cup product 3) Lefschetz 4) Sheaf cohomology

اثبات: با توجه به تئوری هاج، دورام [1] و دولبو[2] به خاطر طبیعی بودن [3] کوهمولوژی‌ها نمودار جابه‌جایی زیر برقرار است:

$$\begin{tikzcd}
H^p(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & H^p(X,\mathcal{O}) \arrow[d] \\
H^p_{dR}(M,\mathbb{C}) \arrow[r, "\pi_{0,p}"] & H^{0,p}(X,\mathcal{O})
\end{tikzcd}$$

در بالا $\mathcal{O}$ بافه نگاشت‌های هلومورف روی خمینه است و $\pi_{0,p}$ افکنش فرم هارمونیک (که همدسته همان فرم مشخصی است که می‌خواهیم $\pi_{0,p}$ را رویش اثر دهیم) روی مولفه $(0,p)$ تجزیه هاج است.

حال فرض کنید $x \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbb{Z})$ در این صورت با توجه به نمودار جابه‌جایی بالا داریم:

$$i_*(x) = 0$$

از دنباله دقیق بلند کوهمولوژیی که به دنباله دقیق کوتاه بافه‌های زیر:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$$

نسبت داده می‌شود ($\mathcal{O}^*$ بافه توابع هولومورفی است که هیچ جا صفر نمی‌شوند)،

$$H^1(X,\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots$$

نتیجه می‌شود x می‌بایست از $H^1(X,\mathcal{O}^*)$ آمده باشد. اما این گروه متناظر با گروه کلاف‌های خطی است پس با توجه به نگاشت مرز، کلاف خطی $\mathcal{L}$ وجود دارد که $x = c_1(\mathcal{L})$. اما چون اولین کلاس چرن هر کلاف خطی، دوگان پوانکاره صفرهای یک مقطع نوعی[4] از آن کلاف است، حکم بدیهی می‌شود. □

با استفاده از قضیه سخت لفشتز[5] که در ادامه صورت ساده‌ای(!) از آن را بیان خواهیم کرد واضح

---

1) de Rham 2) Dolbeault 3) naturality 4) generic 5) Hard Lefschetz Theorem

است که اگر حدس هاج برای کلاس هاج درجه p صادق باشد، برای درجه $۲n - p$ نیز صادق است.

فرض کنید که X خمینه افکنشی مختلط باشد. منظور از مقطع ابرصفحه از X تقاطع X با ابرصفحه نوعی است. دوگان مقطع ابرصفحه X را با η نشان‌می‌دهیم و عملگر L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Lz = z \cdot \eta, \qquad z \in H^i(X, \mathbb{C})$$

قضیه سخت لفشتز: عملگر L^k برای هر k:

$$L^k : H^{n-k}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+k}(X, \mathbb{C})$$

یکریختی است.

پس با توجه به قضیه کلاس $(۱,۱)$-لفشتز و قضیه سخت لفشتز حدس هاج برای کلاس هاج درجه $۲n - ۲$ نیز برقرار است.

حال با این مقدمه از هندسه مختلط و توضیح مانعی که هاج برای تحلیلی بودن یک دور عنوان کرد، در ادامه مانع توپولوژیک مهمی پیدا می‌کنیم که به ما کمک می‌کند تا برای حدس هاج وقتی ضرایب در $\mathbb{Z}$ باشد، مثال نقض بسازیم.

۱ مشخصه چرن[1] و نظریه مانع[2]

در این بخش با استفاده از مشخصه چرن نظریه‌ی مانع را برای Kـ تئوری عنوان می‌کنیم. مشخصهٔ چرن همریختی حلقه‌ای بین $K(X)$ (گروه گروتندیک[۳] کلاف برداری روی X) و $H^{*,even}(X, \mathbb{Q})$ است. اگر $X = S^{۲n}$ در این صورت تصویر مشخصه چرن، ch، $H^*(S^{۲n}, \mathbb{Z})$ می‌شود. برای هر کلاف

---

[1] Chern character

[2] Obstruction theory

[۳] E_f کلافی است که از f بدست می‌آید.

E روی $S^{۲n}$ داریم:

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{rank}(E) + \frac{c_n(E)}{(n-۱)!}$$

فرض کنید E، کلاف $\mathbb{C}^n$ روی $S^{۲n}$ با مقطع سرتاسری φ باشد. از توپولوژی دیفرانسیل می‌دانیم $c_n(E)[S^{۲n}] = \sum_p index_p\varphi$ که جمع روی صفرهای φ است. کلاف $\mathbb{C}^n$ روی $S^{۲n}$ توسط نگاشت:

$$f : S^{۲n-۱} \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$$

که در واقع عضو $\pi_{۲n-۱}(GL(n,\mathbb{C}))$ است، داده می‌شود.

$$f : x \longrightarrow (f^{۱}(X), \dots, f^{n}(X)) \in GL(n,\mathbb{C})$$

f نگاشت $x \longrightarrow \frac{f^{۱}(X)}{\|f^{۱}(X)\|}$ را القا می‌کند که از $S^{۲n-۱}$ به خودش است. درجه این نگاشت برابر $c_n(E_f)[S^{۲n}]$ است، که برای Nهای بزرگ همسان‌ریختی $\pi_{۲n-۱}(GL(N,\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ را به دست می‌دهد.

فرض کنید E کلافی روی CWـ مجتمع X باشد، همچنین $۲\dim E = \dim X = ۲k$. اگر E روی سلول $۲k-۱$ بعدی بدیهی باشد یعنی $E|_{X^{۲k-۱}} = I_k$. در این صورت E روی هر دیسک $۲k$ بعدی $e^{۲k}$ که به $X^{۲k-۱}$ می‌چسبد تا $X^{۲k}$ را بسازد، نیز بدیهی است. از مقایسه این دو بدیهی‌سازی روی $S^{۲k-۱} = \partial e^{۲k}$ نگاشتی $\alpha_E : S^{۲k-۱} \longrightarrow GL(k,\mathbb{C})$ که در واقع عضوی از $\pi_{۲k-۱}(GL(k,\mathbb{C}))$ است، به‌دست می‌آید. عضو η_E در گروه یاد زنجیر $C^{۲k}(X, \pi_{۲k-۱}(GL(k,\mathbb{C}))) = C^{۲k}(X,\mathbb{Z})$، این طور تعریف می‌کنیم که روی $e^{۲k}$ همان عضو α_E که بالاتر تعریف کردیم در $\pi_{۲k-۱}(GL(K,\mathbb{C}))$، باشد. به سادگی دیده می‌شود که $(k-۱)!\eta_E = c_k(E)$. در صورتی که $\dim_{\mathbb{C}} E > k$ نیز می‌توان E را به کلاف بدیهی و کلافی که بعدش k باشد، شکافت که آن کلاف را با E' نمایش می‌دهیم (علت این ادعا فراتر از هدف این مقاله است) که در این حالت $\eta_E \in C^{۲k}(X, \pi_{۲k-۱}(GL(\dim E,\mathbb{C})))$ و دوباره رابطهٔ $(k-۱)!\eta_E = c_k(E)$ برقرار است.

حال فرض کنید $\eta \in C^{۲k}(X, \mathbb{Z})$. برای r به‌قدر کافی بزرگ می‌توانیم کلاف برداری $\mathrm{Vec}_r(X^{۲k})$ را طوری پیدا کنیم که

$$(k-۱)!\eta = c_k(E)$$

فرض کنید تحدید E بر $X^{۲k-۱}$ بدیهی باشد و همچنین روی هر سلول $۲k$ـ بعدی و $e^{۲k}$، که از روی $\partial e^{۲k}$ به $X^{۲k-۱}$ می‌چسبد نیز بدیهی است. مقایسه این دو بدیهی‌سازی عضوی در $\pi_{۲k-۱}(GL(r, \mathbb{C}))$ القا می‌کند که همان $\eta(e^{۲k})$ است. با توجه به آنچه که گفته شد می‌دانیم:

$$(k-۱)!\eta = c_k(E)|_{X^{۲k}}$$

کلاف E توسط نگاشت رده‌بندی:

$$\psi : X^{۲k} \longrightarrow \mathrm{Grass}(r, ۲r)$$

به دست می‌آید[1]. مانع برای گسترش ψ به $X^{۲k+۱}$ عضوی است در گروه پادزنجیر $C^{۲k+۱}(X^{۲k+۱}, \pi_{۲k}(\mathrm{Grass}(r, ۲r)))$ که آن را با η_ψ نشان می‌دهیم $\eta_\psi = \delta\eta$. چون $\eta_\psi(e^{۲k+۱}) =$ عضوی از $\pi_{۲k}(\mathrm{Grass}(r, ۲r))$ که توسط $\psi|_{\partial e^{۲k+۱}}$ تعریف شده است. $\eta_\psi(e^{۲k+۱}) = ۰$ اگر و تنها اگر ψ را بتوان به سلول $e^{۲k+۱}$ گسترش داد. پس اگر η پاد دور باشد، ψ را می‌توان به $X^{۲k+۱}$ گسترش داد.

η_ψ را به عنوان پادزنجیر می‌توان در kـ گروه تعبیر کرد.

$$\eta_\psi(e^{۲k+۱}) = E - I_r|_{\partial e^{۲k+۱}} \in \tilde{K}(S^{۲k})$$

که به وضوح مانع برای گسترش ψ به گراسمانیان است. از طرف دیگر، چون $E - I_r$ در پوچی نگاشت طبیعی $K(X^{۲k}) \longrightarrow K(X^{۲k-۱})$ قرار می‌گیرد پس می‌توان به آن به عنوان عضوی در

---

[1] $\mathrm{Grass}(r, ۲r)$ ، خمینه گراسمانیان، زیرفضاهای خطی r بعدی در $\mathbb{C}^{۲r}$ هستند.

$K(X^{۲k}, X^{۲k-۱}) = \tilde{K}(X^{۲k}/X^{۲k-۱})$ نگاه کرد. حال $\eta(e^{۲k})$ عضوی از $\tilde{K}(S^{۲k})$ است که از واکشیدن[1] $E - I_r$ توسط نگاشت

$$\frac{e^{۲k}}{\partial e^{۲k}} \longrightarrow \frac{X^{۲k}}{X^{۲k-۱}}$$

القا شده است. در نتیجه $\eta_\psi = \delta\eta$.

۲ دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ[2]

در این بخش احکامی دربارهٔ دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ را که در ادامه به آنها نیاز داریم به طور خلاصه بیان می‌کنیم. برای مطالعه طرز ساخت دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ به مقالهٔ [۲] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲: برای CWـ مجتمع متناهی X دنبالهٔ طیفی $\{E_r, d_r\}$ وجود دارد که

$$E_{۲}^{p,q} = H^p(X, K^q(point))$$

و

$$E_{\infty}^{p,q} = \frac{F_p K^{p+q}(X)}{F_{p+۱} K^{p+q}(X)}$$

که در بالا $F_p K^j(X)$ پالایشی[3] از $K^j(X)$ است.

$$F_p K^j(X) = \ker(K^j(X) \longrightarrow K^j(X^{p-۱}))$$

و مشتق‌های این دنباله طیفی با تعلیق[4] جابه‌جا می‌شوند.

---

[1] pullback [2] The Atiyah-Hirzebruch Spectral Sequence [3] Filtration [4] Suspension

برای هر عدد صحیح p, q که $p \geq q$ تعریف می‌کنیم

$$K(p,q) = \sum_{-\infty}^{\infty} K^n(X^p, X^q)$$

در این صورت $E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q}}{B_r^{p,q}}$ که

$$B_r^{p,q} = \ker(K^{p+q}(p, p-۱) \longrightarrow K^{p+q}(p, p-r))$$

$$Z_r^{p,q} = \ker(K^{p+q}(p, p-۱) \xrightarrow{\delta} K^{p+q+۱}(p+r-۱, p))$$

در این صورت با استفاده از قضیه تناوب بات[1]:

$$E_۱^{p,q} = K^{p+q}(X^p, X^{p-۱}) = \begin{cases} C^p(X,\mathbb{Z}) & \text{اگر } q \text{ زوج باشد} \\ ۰ & \text{اگر } q \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

$d_۱$ (مشتق اول دنباله طیفی) همان نگاشت پاد مرز $C^p(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} C^{p+۱}(X,\mathbb{Z})$ است، اگر q زوج باشد. پس برای q زوج داریم:

$$E_۱^{p,q} = K^{p+q}(X^p, X^{p-۱}) \cong C^p(X,\mathbb{Z}) \cong H^p(X^p, X^{p-۱})$$

اما می‌دانیم نگاشت مشخصهٔ چرن در این حالت:

$$\mathrm{ch} : K^p(X^p, X^{p-۱}) \xrightarrow{\cong} H^p(X^p, X^{p-۱})$$

یکریختی است. در دومین صفحه دنباله طیفی داریم:

$$E_۲^{۲p,۰} \xrightarrow{\cong} H^{۲p}(X,\mathbb{Z})$$

که به صورت زیر داده شده است:

$$\xi \in Z_۲^{۲p,۰} = \ker(K^{۲p}(X^{۲p}, X^{۲p-۱}) \longrightarrow K^{۲p+۱}(X^{۲p+۱}, X^{۲p}))$$

---

1) Bott periodicity formula

ξ به شکل $[I_r]-[E]$ است؛ E، کلاف با تار $\mathbb{C}^r$ روی $X^{۲p}$ است که روی $X^{۲p-۱}$ بدیهی و قابل گسترش به $X^{۲p+۱}$ است. با توجه به مطالب بخش قبل می‌دانیم گسترش به $X^{۲p+۱}$ معادل است با صفر شدن $\delta\,\mathrm{ch}_p(E)$[۱].

$$\mathrm{ch}_p : K(X^{۲p}, X^{۲p-۱}) \longrightarrow H^{۲p}(X^{۲p}, X^{۲p-۱})$$

در نتیجه ξ در تناظر است با $H^{۲p}(X,\mathbb{Z}) = H^{۲p}(X^{۲p+۱},\mathbb{Z}) \ni [\mathrm{ch}_p\,\xi]$. عضو ξ تا ابد در دنباله طیفی باقی می‌ماند اگر و تنها اگر

$$\xi \in \ker(K^{۲p}(X^{۲p}, X^{۲p-۱}) \longrightarrow K^{۲p+۱}(X, X^{۲p}))$$

یعنی ξ را بتوان به کل X گسترش داد. پس داریم:

قضیه ۲.۲: $\alpha \in H^{۲p}(X,\mathbb{Z})$ داریم $\forall k \geq ۰,\ d_{۲k+۱}\alpha = ۰$، اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $K(X) \ni \xi$ که روی $X^{۲p-۱}$ بدیهی است و

$$\mathrm{ch}(\xi) = \alpha + \text{کلاس‌های مرتبهٔ بالاتر}\ .$$

۳ بافه منسجم[۲]

در این بخش ما قضیه‌های کارتان که به قضیه‌های A و B شهرت دارند دربارهٔ بافه‌های منسجم صرفاً با نتایجشان بیان می‌کنیم که در بخش‌های بعد از آنها استفاده کنیم.

فرض کنید X خمینه تحلیلی حقیقی از بعد n باشد و $\mathcal{O}$ جوانه[۳] توابع تحلیلی حقیقی با مقادیر مختلط روی X است. می‌دانیم $\mathcal{O}$ بافه‌ای منسجم است یعنی coker نگاشتی بین بافه‌های $\mathcal{O}$ـ مدول آزاد است.

---

[۱] ch_p، pامین مؤلفه ch است.

2) Coherent Sheaves 3) germ

گزاره ۱.۳: اگر S بافه منسجم $\mathcal{O}$ـ مدول باشد، قضیه‌های A و B کارتان صدق می‌کند؛ یعنی برای هر $x \in X$ تصویر $H^{۰}(X,S)$ در S_x، S_x را به عنوان $\mathcal{O}$ـ مدول تولید می‌کند و $H^q(X,S) = ۰$ برای $q \geq ۱$.

گزاره ۲.۳: اگر S یک بافه منسجم $\mathcal{O}$ـ مدول باشد و A زیرمجموعهٔ فشرده از X، در این صورت دنباله‌ای از بافه‌های منسجم به صورت زیر وجود دارد:

$$۰ \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-۱} \longrightarrow \ldots \longrightarrow L_{۰} \longrightarrow S \longrightarrow ۰$$

به طوری که در هر $x \in A$ این دنباله دقیق و هر $(L_i)_x$ آزاد باشد.

حال اگر X خمینه مختلط باشد و $\mathcal{B}$ بافه جوانه توابع هلومورف روی X؛ X خمینه تحلیلی حقیقی نیز هست. اگر T بافه‌ای دلخواه از $\mathcal{B}$ـ مدول‌ها باشد قرار می‌دهیم $T^{۰} = T \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{O}$. به راحتی می‌توان دید که اگر T بافه‌ای منسجم از $\mathcal{B}$ـ مدول‌ها باشد، $T^{۰}$ بافه‌ای منسجم از $\mathcal{O}$ـ مدول‌ها خواهد بود.

حال تجزیه[1] ای که گروتندیک[2] برای بافه‌ها معرفی کرد را می‌توانیم بیان کنیم. فرض کنید V فضای برداری مختلط از بعد q باشد. ما دوگان V را با V^* نمایش می‌دهیم و iـامین ضرب خارجی V را با $\lambda^i(V)$. همریختی ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V^* \otimes \lambda^i(V) \longrightarrow \lambda^{i-۱}(V)$$

$$f \otimes x_{۱} \wedge x_{۲} \wedge \ldots \wedge x_i \longrightarrow \sum_{۱ \leq j \leq i} (-۱)^{i+j} f(x_j) x_{۱} \wedge \ldots \wedge \hat{x}_j \wedge \ldots \wedge x_i$$

در بالا منظور از $\hat{x}_j$ یعنی x_j را حذف می‌کنیم.

گزاره ۳.۳: اگر V فضای برداری مختلط از بعد q و V^* دوگان آن باشد. فرض کنید s مقطع ناصفر از V^* است. همریختی $\alpha_i : \lambda^i(V) \longrightarrow \lambda^{i-۱}(V)$ را ضرب داخلی در مقطع s تعریف می‌کنیم. در

---

[1] resolution [2] Grothendieck

این صورت دنباله دقیق زیر را داریم:

$$۰ \longrightarrow \lambda^q(V) \xrightarrow{\alpha_q} \lambda^{q-۱}(V) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\alpha_۱} \lambda^۰(V) \longrightarrow ۰$$

اثبات: پایه $e_۱,\dots,e_q$ را برای V انتخاب کنید طوری که $s(e_i) = ۰, s(e_۱) = ۱$ برای $i > ۱$. در این صورت روشن است که هر دو زیرفضای $\ker\alpha_r$ و $\operatorname{Im}\alpha_{r+۱}$ توسط اعضای $e_{i_۱}\wedge\dots\wedge e_{i_r}$ تولید می‌شود؛ که $۲ \le i_۱ < i_۲ < \cdots < i_r \le q$. در نتیجه این دنباله دقیق است. □

چون ضرب داخلی تابعگون است حکم قبل برای کلاف‌های برداری نیز صادق است.

گزاره ۴.۳: اگر E کلاف برداری مختلط پیوسته از بعد q روی فضای X باشد و s مقطع E که هیچ جا صفر نمی‌شود. در این صورت دنباله دقیق از فضاهای برداری وجود دارد:

$$۰ \longrightarrow E_q \xrightarrow{\alpha_q} E_{q-۱} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\alpha_۰} E_۰ \longrightarrow ۰$$

که $E_i = \lambda^i(E^*)$ و α_i ضرب داخلی در مقطع s هستند.

فرض کنید E کلاف برداری مختلط از بعد q که تحلیلی حقیقی نیز هست را نمایش دهد. اگر $s : X \longrightarrow E$ مقطع تحلیلی حقیقی از E باشد، بافه S از صفرهای s را اینگونه تعریف می‌کنیم: E را موضعاً به صورت $X \times \mathbb{C}^q$ نمایش می‌دهیم که s در واقع توسط q تابع $s_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$ داده می‌شود. تعریف می‌کنیم $S = \frac{\mathcal{O}}{(s_۱,\dots,s_q)}$. این تعریف از نمایش موضعی E مستقل است. فرض کنید E_i و α_iها مانند گزاره تعریف شده باشند. قرار می‌دهیم L_i بافه موضعاً آزاد در تناظر با E_i باشد. (توجه کنیدکلاف‌های برداری، بافه‌های موضعاً آزاد هستند.)

$$۰ \longrightarrow L_q \xrightarrow{\alpha_q} L_{q-۱} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\alpha_۱} L_۰ \xrightarrow{\varepsilon} S \longrightarrow ۰ \qquad (۱)$$

در بالا $L_۰ = \mathcal{O}$ و E نگاشت طبیعی $L_۰ \longrightarrow S$ است. در نقطه‌ی x که $s(x) \neq ۰$ داریم $S_x = ۰$ و (۱) دنباله دقیق است. فرض کنید s خاصیت ذیل را دارد:

(P) برای x که $s(x) = ۰$ یکریختی موضعی $E \longrightarrow X \times \mathbb{C}^q$ در همسایگی x وجود دارد به طوری که اگر جوانه s_x را توسط جوانه s_iها که $s_i \in \mathcal{O}_x$ $(۱ \le i \le q)$ نمایش دهیم، s_i در $\frac{\mathcal{O}}{(s_۱ \ldots, s_{i-۱})}$ مقسوم‌علیه صفر نیست.

با خاصیت (P) دنباله (۱) در حالت $s(x) = ۰$ نیز دقیق است.

۴ کلاف تفریق

فرض کنید X یک CW- مجتمع متناهی و Y یک زیرمجتمع آن باشد. E و F کلاف‌های برداری روی X و α یکریختی کلافی $E|_Y \xrightarrow{\alpha} F|_Y$ است. در ادامه به هر سه‌تایی (E, F, α) عضوی در $K^{۰}(X, Y)$ نسبت می‌دهیم. بازه بسته واحد را با I نمایش می‌دهیم. زیرفضای A از $X \times I$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \{X \times ۰\} \cup \{X \times ۱\} \cup \{Y \times I\}$$

روی A کلاف برداری L قرار می‌دهیم که تحدیدش به $X \times ۱$، E و تحدیدش به $X \times ۰$، F می‌شود و روی $Y \times I$ توسط α به هم متصل می‌شوند. به بیان دقیق‌تر:

$$I_۰ = I - \{۰\} \qquad I_۱ = I - \{۱\} \qquad I_{۰۱} = I_۰ \cap I_۱$$

$$A_۰ = X \times ۰ \cup Y \times I_۱ \qquad E_۰ = F$$

$$A_۱ = X \times ۱ \cup Y \times I_۰ \qquad E_۱ = E$$

فرض کنید $f_i : A_i \longrightarrow X$ از افکنش $X \times I \longrightarrow X$ القا شده باشد. $f_i^*(E_i)$ کلافی روی مجموعه باز A_i است و α یکریختی $f_۰^*(E_۰) \longrightarrow f_۱^*(E_۱)$ روی مجموعه باز $A_۰ \cap A_۱ = Y \times I_{۰۱}$ القا می‌کند که کلاف موردنظر را روی A می‌دهد. این کلاف عضوی در $K^{۰}(A)$ می‌دهد که با ξ نمایش

می‌دهیم. از دنباله دقیق

$$K^0(X\times I)\longrightarrow K^0(A)\xrightarrow{\delta}K^1(X\times I,A)$$

به دست می‌آوریم $\delta\xi\in K^1(X\times I,A)$.

$$(X\times I)/A=S(\frac{X}{Y}),\qquad K^1(S(\frac{X}{Y}))\cong K^0(X,Y)$$

پس $\delta\xi$ عضوی در $K^0(X,Y)$ است. این عضو را با $d(E,F,\alpha)$ نشان می‌دهیم و کلاف تفریق می‌نامیم.

گزاره ۱.۴: (i) $d(E,F,\alpha)$ تابعگونی است، یعنی اگر $f:(X',Y')\longrightarrow(X,Y)$ نگاشت دلخواه باشد در این صورت $d(f^*E,f^*F,f^*\alpha)=f^!d(E,F,\alpha)$.

(ii) $d(E,F,\alpha)$ تنها به کلاس هموتوپی α بستگی دارد.

(iii) اگر $Y=\phi$ در این صورت $d(E,F,\alpha)=E-F$.

(iv) اگر $f^!:K^*(X,Y)\longrightarrow K^*(X)$ نگاشت طبیعی باشد، $f^!d(E,F,\alpha)=E-F$.

(v) اگر α به یکریختی $E\longrightarrow F$ روی X گسترش پیدا کند، در این صورت $d(E,F,\alpha)=0$.

(vi) $d(E\oplus E',F\oplus F',\alpha\oplus\alpha')=d(E,F,\alpha)+d(E',F',\alpha')$.

(vii) $d(F,E,\alpha^{-1})=-d(E,F,\alpha)$.

(viii) اگر D کلاف برداری روی X باشد، $d(E\otimes D,F\otimes D,\alpha\otimes 1)=d(E,F,\alpha).D$، که سمت راست رابطه از ساختار $K^0(X)$ ـ مدول $K^0(X,Y)$ استفاده کرده‌ایم.

اثبات: (i) از تعریف $d(E,F,\alpha)$ نتیجه می‌شود. فرض کنید π افکنش $X\times I\xrightarrow{\pi}X$ و $i_t:X\longrightarrow X\times I$ شمول $x\longrightarrow(x,t)$ باشد. یک هموتوپی α_t از یکریختی کلافی $E|_Y\longrightarrow F|_Y$

طبق تعریف یکریختی

$$\beta : \pi^*E|_{Y\times I} \longrightarrow \pi^*F|_{Y\times I}$$

را القا می‌کند. پس

$$\begin{aligned} d(E,F,\alpha_۰) &= d(i_۰^*\pi^*E, i_۰^*\pi^*F, i_۰^*\beta) \\ &= i_۰^! d(\pi^*E,\pi^*F,\beta) \end{aligned}$$

و به طور مشابه $d(E,F,\alpha_۱) = i_۱^! d(\pi^*E,\pi^*F,\beta)$. چون $i_۰ \simeq i_۱$ و $K^۰(X,Y)$ تحت هموتوپی ناورداست پس $d(E,F,\alpha_۰) = d(E,F,\alpha_۱)$. پس (ii) نیز ثابت شد. برای (iii) می‌بایست همریختی:

$$\delta : K^۰(X\times S^۰) \longrightarrow K^۱(X\times I, X\times S^۰) \cong K^۰(X)$$

که در بالا $S^۰ = \{۰\}\cup\{۱\} \subset I$. داریم $K^۰(X\times S^۰) \cong K^۰(X)\otimes K^۰(S^۰)$ در نتیجه کافی است حکم را برای وقتی که X فقط یک نقطه است ثابت کنیم:

$$\delta : K^۰(S) \longrightarrow K^۱(I,S^۰) \overset{\sigma}{\cong} K^۰\ (point)$$

چون δ و نگاشت تعلیق، با ch جابه‌جا می‌شود پس کافی است:

$$\delta : H^۰(S^۰) \longrightarrow H^۱(I,S^۰) = H^۰\ (point)$$

را در نظر بگیریم. اما $\delta(a_۱) = +۱$، $\delta(a_۰) = ۱$، که $a_۰$ و $a_۱$ مولدهای $H^۰(S^۰,\mathbb{Z})$ متناظر با نقاط ۰ و ۱ هستند. در نتیجه اثبات (iii) کامل است. (iv) و (v) و (vi) و (viii) از سه‌تای قبلی به سادگی نتیجه می‌شود. حال (vii) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید ξ و η کلاف‌های برداری روی $A = X\times ۰ \cup X\times ۱ \cup Y\times I$ باشند که توسط (E,F,α) و $(F,E,\alpha^{-۱})$ تعریف شده‌اند. اگر $f : A \longrightarrow A$ نگاشت $x \longrightarrow ۱-x$ روی I باشد، داریم $f^*\xi \cong \eta$. پس $\delta\eta = g^!\delta\xi$ که g نگاشت تعلیق نگاشت $x \longrightarrow ۱-x$ است. اما $g^! = -۱$ و چون $\delta\eta = -\delta\xi$ حکم (vii) نتیجه می‌شود.□

حال تعریف کلاف تفریق را تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $E_{n}, \dots, E_{۰}$ کلاف‌های برداری روی X باشند که

$$۰ \longrightarrow E_{n} \xrightarrow{\alpha_{n}} E_{n-۱} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_{۱} \xrightarrow{\alpha_{۱}} E_{۰} \xrightarrow{\alpha_{۰}} ۰ \tag{۲}$$

دنباله دقیق ازکلاف‌های برداری روی Y باشد. در این صورت تعمیم کلاف تفریق را طوری تعریف می‌کنیم که

$$d(E_{۰}, E_{۱}, \dots, E_{n}, \alpha_{۱}, \alpha_{۲}, \dots, \alpha_{n}) \in K^{\circ}(X, Y)$$

دنباله دقیق (۲) به دنباله کوتاه دقیق

$$۰ \longrightarrow F_{r} \longrightarrow E_{r} \longrightarrow F_{r-۱} \longrightarrow ۰ \tag{۳}$$

می‌شکند. در بالا $F_{r} = \ker \alpha_{r}$ که کلاف برداری روی Y است. دنباله دقیق کوتاه (۳) می‌شکافد و چون هر دو شکافتنی با هم هموتوپ هستند، با انتخاب شکافتنی دلخواه برای هر r یکریختی‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\lambda : \sum E_{۲k+۱} \longrightarrow \sum_{r} F_{r}$$
$$\mu : \sum_{k} E_{۲k} \longrightarrow \sum_{r} F_{r}$$

پس $\alpha = \lambda^{-۱}\mu$ یکریختی $\sum E_{۲k} \longrightarrow \sum E_{۲k+۱}$ را القا می‌کند. با توجه به گزارهٔ ۱.۴ (ii) می‌توانیم عضو یکتا

$$d(E_{۰}, \dots, E_{n}; \alpha_{۱}, \dots, \alpha_{n}) = d\left(\sum E_{۲k}, \sum E_{۲k+۱}, \alpha\right) \in K^{\circ}(X, Y)$$

را تعریف کنیم که به طور خلاصه با $d(E_{i}, \alpha_{i})$ نشان می‌دهیم. خواص کلاف تفریق تعمیم یافته را در گزاره زیر خلاصه می‌کنیم.

گزاره ۲.۴: (i) $d(E_{۰},\dots,E_n;\alpha_{۱},\dots,\alpha_n)$ تابعگونی است.

(ii) $d(E_{۰},\dots,E_n;\alpha_{۱},\dots,\alpha_n)$ تنها به کلاس هموتوپی $(\alpha_{۱},\dots,\alpha_n)$ بستگی دارد.

(iii) اگر $Y=\phi$، در این صورت $d(E_{۱},\dots,E_n;\alpha_{۱},\dots,\alpha_n)=\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^iE_i$.

(iv) اگر $f^!:K^{۰}(X,Y)\longrightarrow K^{۰}(X)$ نگاشت طبیعی باشد،

$$f^!d(E_{۰},\dots,E_n;\alpha_{۱},\dots,\alpha_n)=\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^iE_i$$

(v) اگر $\alpha_{۱},\dots,\alpha_n$ به X توسعه پیدا کند یعنی $۰\to E_n\overset{\alpha_n}{\to}E_{n-۱}\to\dots\to E_{۰}\to ۰$ روی X دقیق باشد. داریم:

$$d(E_{۰},\dots,E_n;\alpha_{۱},\dots,\alpha_n)=۰$$

(vi) $d(E_i,\alpha_i)+d(E'_i,\alpha'_i)=d(E_i\oplus E'_i,\alpha_i\oplus\alpha'_i)$،

(vii) $d(۰,E_{۰},\dots,E_n;۰,\alpha_{۱},\dots,\alpha_n)=-d(E_{۰},\dots,E_n;\alpha_{۱},\dots,\alpha_n)$

(viii) اگر D کلاف برداری روی X باشد، داریم:

$$d(E_i\otimes D,\alpha_i\otimes ۱)=d(E_i,\alpha_i)D$$

حال به ساختن کلاف تفریق ویژه‌ای خواهیم پرداخت. فرض کنید X یک CWـ مجتمع متناهی و E کلاف برداری مختلط روی X از بعد q باشد. کلاف کره واحد و دیسک واحد E را به ترتیب با $A^{۰}$ و A نمایش می‌دهیم. اگر $\pi:A\longrightarrow X$ نگاشت افکنشی باشد، در این صورت π^*E مقطعی که هیچ جا صفر نمی‌شود روی $A^{۰}$ دارد. پس با استفاده ازگزاره ۴.۳ روی $A^{۰}$ دنباله دقیق ازکلاف‌های برداری زیر را داریم:

$$۰\longrightarrow F_q\xrightarrow{\alpha_q}F_{q-۱}\longrightarrow\dots\xrightarrow{\alpha_{۱}}F_{۰}\longrightarrow ۰$$

که $F_i=\pi^*\lambda^i(E^*)$. در نتیجه عضو زیر در $K^{۰}(A,A^{۰})$ خوش تعریف است:

$$d(F_{۰},F_{۱},\dots,F_q;\alpha_{۱},\dots,\alpha_q)\in K^{۰}(A,A^{۰})$$

گزاره ۳.۴: فرض کنید E کلاف برداری مختلط روی CW- مجتمع متناهی X باشد و A و $A^۰$ مانند بالا تعریف شده باشند. کلاف تفریق $d(\pi^*\lambda^i(E^*), \alpha_i)$ را با ξ نشان می‌دهیم. در این صورت $\operatorname{ch}\xi = \varphi_*\mathcal{T}(E)^{-۱}$ که φ_* همریختی جیسین[1] و $\mathcal{T}$ کلاس تاد[2] است.

اثبات: می‌دانیم $d(\pi^*\lambda^i(E^*), \alpha_i)$ تابعگونی است در نتیجه کافی حکم را برای کلاف عام[3] ثابت کنیم. پس فرض کنید X فضای عام برای $U(q)$ باشد (فضای عام برای گروه G، CW- مجتمع متناهی نیست اما می‌توانیم فضایی انتخاب کنیم که نوع هموتوپی آن تا سلول N بعدی با فضای عام یکسان باشد و بعد N را بقدر کافی بزرگ کنیم.) با استفاده از گزاره ۲.۴ می‌دانیم اگر تصویر ξ را در $K^۰(X) \cong K^۰(A)$ با η نمایش دهیم:

$$\eta = \sum(-۱)^i\lambda^i(E^*)$$

اما می‌دانیم اگر $\sum_{j=۰}^{q} c_j(E)x^j = \prod_{i=۱}^{q}(۱+\gamma_i x)$ که $c_j(E)$ کلاس‌های چرن E هستند، داریم:

$$\operatorname{ch}\lambda^r E^* = \sum e^{-(\gamma_{i_۱}+\cdots+\gamma_{i_r})}$$

که جمع بالا روی همه ترکیب‌های $i_۱, \ldots, i_r$ که $۱ \leq i_۱ < \cdots < i_r \leq q$ تغییر می‌کند. در نتیجه

$$\begin{aligned}\sum_{r=۰}^{q}(-۱)^r \operatorname{ch}\lambda^r E^* &= \prod_{i=۱}^{q}(۱-e^{-\gamma_i})\\ &= (\gamma_۱\ldots\gamma_q)\prod_{i=۱}^{q}\frac{۱-e^{-\gamma_i}}{\gamma_i}\\ &= c_q(E)\mathcal{T}(E)^{-۱}\end{aligned}$$

از طرف دیگر می‌دانیم تصویر طبیعی $H^*(BU(q), BU(q-۱), \mathbb{Q})$ در $H^*(BU(q), \mathbb{Q})$ یکریخت است با ایده‌آل تولید شده توسط $c_q(E)$ و از طرفی بنابر تعریف همریختی جیسین φ_* در این تصویر $\varphi_*(x)$ به $c_q(E)x$ می‌رود، پس: $\operatorname{ch}\xi = \varphi_*\mathcal{T}^{-۱}(E)$. □

---

1) Gysin homomorphism 2) Todd class 3) universal bundle

۵ عنصر گروتندیک

حال در این بخش با ارتباط دادن مطالب دو بخش قبل برای هر بافه منسجم عنصری در Kـ گروه منسوب به عنصر گروتندیک می‌سازیم که در اثبات قضیه گروتندیک ـ ریمان ـ رخ مفهوم کلیدی به حساب می‌آید. فرض کنید X خمینه تحلیلی حقیقی و $\mathcal{O}$ بافه جوانه توابع تحلیلی حقیقی با مقادیر مختلط روی X باشد. برای هر زیرفضای Y، از X و بافه منسجم، S، از $\mathcal{O}$ مدول‌ها روی X که محمل آن در Y است، عنصر $K^{\circ}(X, X-Y) \ni \gamma_Y(S)$ نسبت خواهیم داد.

برای تعریف $\gamma_Y(S)$ می‌بایست ابتدا عنصر $K^{\circ}(A,B) \ni f^{!}\gamma_Y(S)$ را بر هر نگاشت $f : (A,B) \longrightarrow (X, X-Y)$ که (A,B) زوج مجتمع‌های متناهی هستند، تعریف کنیم. چون $f(A) \subset X$ فشرده است می‌توانیم باز $f(A) \subset U$ که $\bar{U}$ فشرده است، انتخاب کنیم. حال از گزاره ۲.۳ استفاده می‌کنیم، منتها به جای A، $\bar{U}$ را جایگزین می‌کنیم و بعد به U دنباله را تحدید می‌کنیم. پس دنباله دقیق از بافه‌ها روی U به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۰ \longrightarrow L_n \xrightarrow{\alpha_n} L_{n-۱} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\alpha_۱} L_۰ \xrightarrow{\alpha_۰} S \longrightarrow ۰$$

در بالا L_iها بافه‌های موضعاً آزاد هستند. فرض کنید E_iها کلاف‌های برداری مختلط متناظر با L_iها باشند. چون محمل S در Y است، دنباله دقیق از کلاف‌های برداری روی $U - U \cap Y$ به دست می‌آوریم:

$$۰ \longrightarrow E_n \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-۱} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\alpha_۱} E_۰ \longrightarrow ۰$$

توجه کنید $f(B) \subset U - U \cap Y$ پس دنباله دقیق از کلاف‌های برداری روی B القا می‌شود، در نتیجه می‌توانیم تعریف کنیم:

$$f^{!}\gamma_Y(S) = d(f^*E_۰, \ldots, f^*E_n; f^*\alpha_۱, \ldots, f^*\alpha_n)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $f^!\gamma_Y(S)$ به تجزیه افکنشی S و به انتخاب باز U بستگی نداشته و تنها به کلاس هموتوپی f وابسته است. پس با توجه به گزاره ۲.۴ (i) $f^!\gamma_Y(S)$ به خاطر طبیعی بودن تعمیم کلاف تفریق عضو $\gamma_Y(S)$ را به طور یکتا در $K^۰(X, X-Y)$ مشخص می‌کند.

گزاره ۱.۵: فرض کنید X دیسک باز $\sum_۱^n |z_i|^۲ < ۱$ در $\mathbb{C}^n$ و Y زیرفضایی از X باشد که با معادله‌های $z_i = ۰ \ (۱ \le i \le q)$ داده شده است. فرض کنید $\mathcal{B}_Y$ بافه توابع هولومورف روی Y (که روی $X - Y$ صفر است.) باشد. $\mathcal{B}_Y^۰ = \mathcal{B}_Y \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{O}_X$. در این صورت داریم:

$$\mathrm{ch}\,\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^۰) = u$$

که u مولد $H^{۲q}(X, X-Y, \mathbb{Z})$ متناظر با Y است.

اثبات: چون $\mathcal{B}_Y^۰ = \frac{\mathcal{O}_X}{(z_۱,\dots,z_q)}$ می‌توانیم از نکته‌ای که در انتهای بخش ۳ آوردیم برای کلاف بدیهی $E = X \times \mathbb{C}^q$ استفاده کنیم. در این صورت تجزیه‌ای از $\mathcal{B}_Y^۰$ به دست می‌آوریم. این تجزیه را به دیسک

$$A: \quad \sum_{i=۱}^{q} |z_i|^۲ \le \frac{۱}{۲} \qquad z_i = ۰ \ (i > q)$$

تحدید می‌کنیم. با استفاده از گزاره ۳.۴ به دست می‌آوریم،

$$\mathrm{ch}\,\gamma_Y(\mathcal{B}^۰) = u$$

که $u \in H^{۲q}(A, A^۰; \mathbb{Z})$ مولد متناظر با دوگان Y است. چون $H^{۲q}(A, A^۰; \mathbb{Z}) \cong H^{۲q}(X, X-Y; \mathbb{Z})$ پس حکم نتیجه شد.□

۶ دورهای تحلیلی

در این بخش توضیح می‌دهیم چگونه مشکل تکنیکی در تعریف کلاس همولوژی یا کوهمومولوژی تحلیلی مختلط را رفع کنیم. گزاره‌های ذیل مقدماتی و کلاسیک هستند که از آنها استفاده می‌کنیم.

گزاره ۱.۶: اگر X خمینه مشتق‌پذیر باشد و Y زیرخمینه بسته از نقص بعد k ، فرض کنید $f : A \longrightarrow X$ نگاشتی از CW- مجتمع متناهی A از بعد کمتر از k به X باشد. در این صورت با هموتوپی بقدر دلخواه کوچک می‌توان f را با g هموتوپ کرد که $g(A) \subset X - Y$.

گزاره ۲.۶: اگر X خمینه مختلط و Y زیرخمینه تحلیلی با مقادیر مختلط از X با نقص بعد مختلط q باشد، فرض کنید (A, B) زوج CW- مجتمع متناهی از بعد کمتر از $۲q$ باشند. در این صورت برای هر نگاشت $f : (A, B) \longrightarrow (X, X - Y)$ می‌توان نگاشت g هموتوپ با f را پیدا کرد که $g(A) \subset X - Y$.

گزاره ۳.۶: فرض X و Y مانند گزاره قبل باشند، در این صورت $i : X - Y \longrightarrow X$ یکریختی زیر را القا می‌کند:

$$i^* : H^r(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^r(X - Y; \mathbb{Z}) \qquad ۰ \leq r \leq ۲q - ۲$$

اثبات: اگر A یک CW- مجتمع متناهی باشد و $f : A \longrightarrow X$ نگاشت دلخواه، از گزاره ۲.۶ برای زوج $(A^{۲q-۱}, \emptyset)$[1] نتیجه می‌گیریم f با نگاشت g هموتوپ است که $g(A^{۲q-۱}) \subset X - Y$. پس i^* یک به یک است. حال گزاره ۲.۶ را برای زوج $(A^{۲q-۲} \times I, A^{۲q-۲} \times ۰ \cup A^{۲q-۲} \times ۱)$ به کار ببریم نتیجه می‌شود که کلاس هموتوپی $g : A^{۲q-۲} \longrightarrow X - Y$ به طور یکتا به‌وسیلهٔ f معین می‌شود، پس i^* پوشا نیز هست. □

---

[1] A^i سلول i- بعدی A است.

حال با استفاده از گزاره قبل کلاس دوگان زیرفضای تحلیلی را تعریف می‌کنیم. فرض کنید X خمینه همبند مختلط و Y زیرفضای تحلیلی (حقیقی با مقادیر مختلط) از نقص بعد q در X باشد. اگر W زیرفضای تکینه[1] Y باشد، می‌بایست نقص بعدش از $q + ۱$ بزرگتر و یا مساوی باشد. پس در صورتی که گزاره قبل را برای X و W بکار ببریم، داریم:

$$i^* : H^{۲q}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{۲q}(X - W, \mathbb{Z})$$

i^* یکریختی است، اما از طرفی $Y - W$ زیرخمینه بسته $X - W$ است و هر دو به طور طبیعی به خاطر ساختار مختلط جهت‌دار هستند. پس $Y - W$ کلاسی مانند $y'' \in H^{۲q}(X - W, \mathbb{Z})$ را تعریف می‌کند.

گزاره ۴.۶: اگر X خمینه مختلط و Y زیرخمینه تحلیلی (حقیقی اما با مقدار مختلط) از X با نقص بعد q باشد، W را زیرفضای تکینه Y قرار می‌دهیم. در این صورت یک و فقط یک کلاس $y \in H^{۲q}(X, \mathbb{Z})$ وجود دارد که تصویرش در $H^{۲q}(X - W, \mathbb{Z})$ کلاس y'، کلاسی که توسط $Y - W$ به دست می‌آید، بشود.

کلاس y در گزارهٔ ۴.۶ را کلاسی که توسط زیرفضای Y مشخص می‌شود، می‌نامیم.

گزاره ۵.۶: فرض کنید X و Y مانند گزاره قبل تعریف شده باشد. نگاشت $j : (X - W, X - Y) \longrightarrow (X, X - Y)$ یکریختی زیر را القا می‌کند:

$$(۰ \leq r \leq ۲q) \qquad j^* : H^r(X, X - Y; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^r(X - W, X - Y; \mathbb{Z})$$

اثبات: استدلال شبیه گزاره ۳.۶ است. فرض کنید $f : (A, B) \longrightarrow (X, X - Y)$ نگاشتی از زوج CW‌ـ مجتمع‌های متناهی (A, B) باشد. گزاره ۲.۶ را برای زوج $(A^{۲q+۱}, B^{۲q+۱})$ و فضاهای

---

1) Singular subspace

X و $X - W$ به کار می‌بریم، پس نگاشت g هموتوپ با f وجود دارد که $g(A^{۲q+۱}) \subset X - W$؛ در نتیجه j^* یک به یک است. حال اگر گزاره ۲.۶ را برای زوج $(A^{۲q} \times I, B^{۲q} \times I \cup A^{۲q} \times ۰ \cup A^{۲q} \times ۱)$ و فضاهای X و $X - W$ بکار ببریم مانند گزاره ۳.۶ نتیجه می‌گیریم که j^* پوشا نیز هست.□

گزاره ۶.۶: دوباره فرض کنید X و Y مانند گزاره ۲.۵ تعریف شده‌اند با این تفاوت که Y تحویل‌ناپذیر باشد، در این صورت $H^{۲q}(X, X - Y; \mathbb{Z})$ گروه دوری نامتناهی است که با عضوی مانند u تولید می‌شود که تصویرش در $H^{۲q}(X; \mathbb{Z})$، y، کلاس Y، است.

اثبات: با استفاده از گزاره ۳.۶ و ۵.۶ نمودار جابه‌جایی زیر را داریم:

$$\begin{tikzcd}
H^{۲q}(X, X - Y, \mathbb{Z}) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d] & H^{۲q}(X - W, X - Y; \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
H^{۲q}(X, \mathbb{Z}) \arrow[r, "i^*"] & H^{۲q}(X - W; \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

در بالا i^* و j^* هر دو یکریختی هستند. با توجه به نحوه‌ی تعریف کلاس y، می‌توانیم برای اثبات گزاره، حکم را برای $X - W$ و $Y - W$ به جای X و Y ثابت کنیم. یعنی می‌توانیم فرض کنیم Y بدون تکینگی و همبند است. پس $H^{۲q}(X, X - Y; \mathbb{Z})$ دوری نامتناهی است که با کلاس تعریف شده توسط Y تولید می‌شود.□

۷ قضیه اصلی

فرض کنید X خمینه مختلط و $y \in H^{۲q}(X; \mathbb{Z})$، می‌گوییم کلاس y تحلیلی مختلط است اگر زیرفضاهای تحلیلی (حقیقی با مقادیر مختلط) Y_i وجود داشته باشد به طوری که: $y = \sum n_i y_i$،

$n_i \in \mathbb{Z}$، y_i کلاسی است که توسط Y_i در $H^{2q}(X;\mathbb{Z})$ تعریف می‌شود. حال می‌توانیم قضیه اصلی این مقاله را بیان کنیم.

قضیه ۱.۷: اگر X خمینه مختلط و $y \in H^{2q}(X;\mathbb{Z})$ دور تحلیلی مختلط باشد، می‌بایست $d_r y = 0$ برای هر r، که d_r مشتق‌های دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ $H^* \Longrightarrow K^*$ هستند. به طور خاص برای هر عدد اول p می‌بایست $\delta_p P_p^1(y) = 0$.

یادداشت: P_p^1، pامین توان عملگر استینراد است که $P_p^1 : H^{2q}(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2q+2p-2}(X,\mathbb{Z}_p)$. در حالتی که $p = 2$، $\delta_p P_p^1$ همان Sq^3 است.

با استفاده ازگزاره ۲.۶ و ۶.۶ و همچنین ۱.۸ که در بخش اثبات می‌کنیم قضیه ۱.۷ ازگزاره زیر نتیجه می‌شود.

گزاره ۲.۷: فرض کنید X خمینه مختلط و Y زیرفضای بسته تحویل‌ناپذیر تحلیلی از نقص بعد مختلط q باشد و u مولد $H^{2q}(X, X-Y, \mathbb{Z})$ باشد که درگزاره ۶.۶ بیان کردیم. در این صورت

$$\mathrm{ch}\,\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^0) = \rho_*(u) + \text{درجات بالاتر}$$

که در بالا $\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^0)$ عنصر گروتندیک از بافه $\mathcal{B}_Y^0$ است و ρ_* نگاشتی که از نشاندن ضرایب $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Q}$ القا می‌شود.

توجه کنید که چون $\mathcal{B}_Y^0$ بافه‌ای منسجم است پس $\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^0)$ خوش تعریف است. از طرفی چون $\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^0)$ و u تابعگونی[1] هستند در نتیجه کافی است گزاره ۲.۷ را برای مثال خاص ثابت کنیم. اما گزاره ۱.۵ حالت خاص گزاره ۱.۷ است وقتی X دیسک باز $\sum |z_i|^2 < 1$ و Y زیرفضای $z_i = 0$ $(1 \le i \le q)$ در نتیجه گزاره ۲.۷ و با توجه به خواص دنباله طیفی اتیا ـ هیتزربروخ و قضیه ۲.۲، قضیه ۱.۷ نیز اثبات شد.

---

[1] functorial

قضیه ۱.۷ شرط لازم برای آن‌که یک دور تحلیلی باشد می‌دهد که این به ما کمک می‌کند که تا دورهایی بسازیم که تحلیلی هستند. در حالتی که خمینه X استاین[1] باشد مثال ساده‌ای وجود دارد، اما مثال خمینه افکنشی جبری که از روی ایده‌های سِر[2] ساخته شده بیشتر جالب توجه است.

گزاره ۳.۷: اگر G گروهی متناهی و n عدد طبیعی $(n > ۲)$ باشد، خمینه جبری افکنشی X وجود دارد که نوع هموتوپی nـام X با ضرب فضاهای آیلنبرگ ـ مک لین $K(G, ۱) \times K(\mathbb{Z}, ۲)$ یکسان است و مشخصاً $H^*(G, \mathbb{Z})$ یک فاکتور مستقیم[3] $H^*(X, \mathbb{Z})$ است.

گزاره ۴.۷: اگر p عددی اول در این صورت گروه متناهی G و کلاس کوهمولوژی $y \in H^{۲q}(G, \mathbb{Z})$ با مرتبه p وجود دارد که $\delta_p P_p^۱(y) \neq ۰$.

در نتیجه با استفاده از مشاهده بخش بعد در مورد مشتق دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ و دو گزاره قبل خمینه افکنشی جبری پیدا کردیم که مثال نقض حدس هاج است.

اثبات ۳.۷: سِر در [۵] نشان داد که برای عدد طبیعی $r \geq ۱$ داده شده نمایش G در $\mathbb{C}^{N+۱}$ و خمینه جبری Y در $\mathbb{P}^N$ وجود دارند که Y تحت عمل G ناوردا است و همچنین اولاً عمل G روی Y نقطه ثابت ندارد، ثانیاً، Y تقاطع تام[4] از تعدادی ابررویه[5]درجه d در $\mathbb{P}^N$ است که روی Y تکینگی ندارد و به طور تراگذر[6] یکدیگر را قطع می‌کنند و ثالثاً، بعد مختلط Y، r است. Y همبند است و $X = \frac{Y}{G}$ یک خمینه جبری افکنشی. توجه کنید که $Y \longrightarrow \mathbb{P}_N$، $(r-۱)$ ـهم‌ارز هموتوپی است. چون در ابتدا با درنظر گرفتن همه چندجمله‌ای‌های درجه d، $\mathbb{P}^N$ را در $\mathbb{P}^M$ بنشانید، با توجه به انتخاب Y، Y از تقاطع تراگذر $\mathbb{P}^M$ با زیرفضای خطی L به دست می‌آید. اما به سادگی با استفاده از هندسه دیفرانسیل می‌دانیم نگاشت $L \cap \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ با نگاشت $L' \cap \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ هم‌ارز هموتوپی است، که L'

---

[1] Stein [2] Serre [3] direct factor [4] complete intersection [5] hyper surface

[6] transversally

زیرفضای خطی هم بعد L است که $\mathbb{P}^N$ را به طور تراگذر قطع می‌کند. در نتیجه $Y \longrightarrow \mathbb{P}^N$ را می‌توانیم با $Y' \longrightarrow \mathbb{P}^N$ که Y' تقاطع تام ابررویه‌های بدون تکینگی است، جایگزین کنیم. حال از صورتی از قضیه لفشتز[1] که توسط بات [۳] ثابت شد، استفاده کنیم، نتیجه می‌شود $Y \longrightarrow \mathbb{P}^N$، $(r - ۱)$ ـ هم‌ارز هموتوپی است. فرض کنید $v \in H^{۲}(Y, \mathbb{Z})$ تحدید مولد طبیعی $\mathbb{P}^N$ باشد، در این صورت v، کلاس چرن تحدید کلاف خطی $\mathbb{C}^{n+۱} - \{۰\} \longrightarrow \mathbb{P}^N$ است. چون G روی این فضای کلاف عمل می‌کند، کلاف ξ روی X وجود دارد به طوری که $\eta = \pi^*\xi$، که $\pi : Y \longrightarrow X$ نگاشت پوششی است. اگر u کلاس چرن ξ باشد می‌بایست $v = \pi^* u$. فرض کنید u توسط نگاشت $f : X \longrightarrow K(\mathbb{Z}, ۲)$ القا شده باشد و $g : X \longrightarrow B_G$ نگاشتی باشد که نگاشت پوششی $Y \longrightarrow X$ را القا می‌کند. همچنین فرض کنید $\bar{g} : Y \longrightarrow E_G$ نگاشت طبیعی باشد که از g روی کلاف‌ها القا می‌شود.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "(f\circ\pi, \bar{g})"] \arrow[d, "\pi"] & K(\mathbb{Z}, Y) \times E_G \arrow[d] \\
X \arrow[r, "(f, g)"] & K(\mathbb{Z}, Y) \times B_G
\end{tikzcd}$$

نگاشت $(f \circ \pi, \bar{g})$، $(r - ۱)$ هم‌ارز هموتوپی است، در نتیجه (f, g) نیز اینگونه است. اگر فرض کنید $r - ۱ \geq n$ با توجه به این که $B_G = K(G, ۱)$ است، حکم ثابت شده است.□

اثبات ۴.۷: فرض کنید p عدد اول فرد است، $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. با توجه به انتخاب G هر عضو غیرصفر $H^q(G, \mathbb{Z})$، $(q \geq ۱)$ مرتبه p است. در نتیجه $H^*(G, \mathbb{Z})$ پوچی همریختی باکشتاین[2] است.

$$\beta : H^*(G, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{*+۱}(G, \mathbb{Z}_p)$$

با استفاده از فرمول کونت[3] روی میدان‌ها داریم، $H^*(G, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_۱, u_۲, u_۳, v_۱, v_۲, v_۳]$ که برای $i = ۱, ۲, ۳$، $u_i^{۲} = ۰$ و همچنین $\beta(u_i) = v_i$ و $P_p^{۱}(u_i) = ۰$. $P_p^{۱}(v_i) = v_i^p$. قرار می‌دهیم

---

[1] Lefschetz [2] Bockstein [3] Künneth formula

$\mathcal{L}^1 = \beta P_p^1 - P_p^1\beta$، به سادگی مشاهده می‌شود $\mathcal{L}^1$ پادمشتق است و اگر $x \in \ker\beta$، داریم $\mathcal{L}^1(x) = \beta P_p^1(x)$. در نتیجه برای اثبات گزاره ۴.۷ می‌بایست نشان دهیم $y \in H^{2q}(G, \mathbb{Z}_p)$ وجود دارد به طوری که $\beta(y) = 0$و $\mathcal{L}^1(y) \neq 0$. تعریف می‌کنیم $y = \beta(u_1u_2u_3)$. به وضوح $\beta(y) = 0$ و

$$\mathcal{L}^1(y) = \mathcal{L}^1(\sum_{\text{دوری}} v_1u_2u_3) = -\sum_{\text{دوری}}(v_1v_2^pu_3 - v_1u_2v_3^p) \neq 0. \qquad \square$$

۸ عملگر d_{2p-1}

در این بخش به اثبات ادعایی درباره مشتق‌های d_{2p-1} از دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ که در بخش قبل استفاده کردیم، می‌پردازیم. صورت ادعایی که در بخش قبل استفاده کردیم به صورت زیر بود:

گزاره ۱.۸: اگر $d_ru = 0$ برای هر r برقرار باشد، که d_r مشتق‌های دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ هستند، در این صورت $\delta_pP_p^1(u) = 0$.

این گزاره ازگزاره زیر نتیجه می‌شود:

گزاره ۲.۸: اگر $u \in H^k(X; \mathbb{Z})$ که p عددی اول، در این صورت عدد صحیح N که نسبت به p اول است وجود دارد، به طوری که $d_s(Nu) = 0$، $s < 2p - 1$ و $d_{2p-1}(Nu) = -N\delta_pP_p^1(u)$.

با توجه به بخش (۲) که شرط صفر شدن مشتق‌های دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ برحسب مشخصه چرن بیان کردیم، ضابطه اولین مشتق ناصفر برحسب مشخصه چرن قابل بیان است.

لم ۳.۸: با نمادگذاری بخش (۲) فرض کنید $d_s\alpha = 0$ برای $s < r$. اگر پادزنجیر $\mathrm{ch}_{k+r-1}(\xi)$ را با β نمایش دهیم، $\delta\beta$ نمایش پادزنجیر $d_r\alpha$ خواهد بود.

برای اثبات گزاره ۲.۸ از خواص فضای آیلنبرگ ـ مک‌لین $K(\mathbb{Z}, n)$ استفاده می‌کنیم:

(۱) $H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z})$ برای $۰ < q < n$ متناهی و مستقل از n است.

(۲) pـ زیرگروه $H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z})$ برای $۰ < q < ۲p - ۱ \leq n$ صفر است.

(۳) اگر $n > ۲p - ۱$، pـ زیرگروه $H^{n+۲p-۱}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z})$ دوری از مرتبه p است که با $\delta_p P_p^۱(v)$ که v کلاس پایه‌ای[1] $K(\mathbb{Z},n)$ است، تولید می‌شود. همچنین از خواص گروه هموتوپی پایدار گروه‌ها نیز استفاده می‌کنیم:

(۴) $\pi_q^s = \pi_{n+q}(S^n)$ برای $۰ < q < n - ۱$ متناهی و مستقل از n است.

(۵) pـ زیرگروه π_q^s برای $۰ < q < ۲p - ۳$ صفر است.

(۶) pـ زیرگروه $\pi_{۲p-۳}^s$ دوری از مرتبه p است.

لم ۴.۸: اگر p اول و $\mathbb{P}^n$ فضای افکنشی مختلط از بعد n باشد، نگاشت پایدار[2] $g : S^{۲p} \longrightarrow \mathbb{P}^p$ از درجه Mp وجود دارد که M نسبت به p اول است.

اثبات: دنباله دقیق از گروه هموتوپی پایدار برای زوج $\mathbb{P}^n$ و $\mathbb{P}^{n-۱}$ را درنظر بگیرید:

$$\ldots \longrightarrow \pi_q^s(\mathbb{P}^{n-۱}) \xrightarrow{i_*} \pi_q^s(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{j_*} \pi_{q-۲n}^s \xrightarrow{\delta} \ldots$$

برای اثبات لم کافی است عضو $\alpha \in \pi_{۲p}^s(\mathbb{P}^p)$ پیدا کنیم که $j_*(\alpha) = Mp\eta$ (η مولد $\pi_۰^s = \mathbb{Z}$ است.) این معادل است با این که نشان دهیم $\delta(\eta) \in \pi_{۲p-۱}^s(\mathbb{P}^{p-۱})$ مرتبه‌ای دارد که Mp را می‌شمارد. با قرار دادن $q = ۲p - ۱$ و $n = ۲, \ldots, p - ۱$ در دنباله دقیق بالا و با استفاده از (۵) و (۶) نتیجه می‌گیریم که $\pi_{۲p-۱}^s(\mathbb{P}^{p-۱})$ دوری مرتبه p است و در نتیجه لم حاصل شد.□

حال به اثبات گزاره ۲.۸ بازمی‌گردیم. چون دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ طبیعی است، کافی است فرض کنیم X ساختار سلولی متناهی بعدی اما بعد به دلخواه بزرگ از $K(\mathbb{Z},k)$ است و u از کلاس

---

[1] fundamental class

[2] منظور این است که وجود دارد $k > ۰$ که $S^kg : S^{۲p+k} \longrightarrow S^k\mathbb{P}^p$ درجه‌اش Mp است. (S^kg یعنی k بار روی g نگاشت تعلیق را اثر دهید.)

پایه‌ای v القا شده باشد. با توجه به (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم عدد صحیح N نسبت به p اول وجود دارد که $d_s(Nv) = ۰$ برای $s < ۲p - ۱$ و

$$\exists\lambda \in \mathbb{Z}_p \qquad d_{۲p-۱}(Nv) = \lambda N \delta_p P_p^{۱}(v)$$

چون دنباله طیفی تحت نگاشت تعلیق نیز پایدار است پس λ از k مستقل است. برای محاسبه λ فرض کنید

$$X = S^{۲n}(\mathbb{P}^p) \cup \mathbb{D}^{۲n+۲p+۱}$$

که $\mathbb{D}^{۲n+۲p+۱}$ سلولی است که با نگاشت g که از لم ۴.۸ به دست آوردیم به $S^{۲n}(\mathbb{P}^p)$ چسبیده است. اگر x مولد $H^{۲}(\mathbb{P}^p, \mathbb{Z})$ باشد. با ترکیب نگاشت تعلیق با خودش داریم $u = S^{۲n}(x) \in H^{۲n+۲}(X, \mathbb{Z})$. می‌دانیم عضو $\xi \in K^*(\mathbb{P}^p)$ وجود دارد که

$$\operatorname{ch} \xi = e^x - ۱ = x + \frac{x^{۲}}{۲!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}$$

در نتیجه عضو $K^*(S^{۲n}(\mathbb{P}^p)) \ni \eta = S^{۲n}(\xi)$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\operatorname{ch} \eta = S^{۲n}(e^x - ۱) = u + \cdots + \frac{S^{۲n}(x^p)}{p!}$$

در نتیجه با توجه به لم ۳.۸، $d_r u$ توسط پادزنجیر $\frac{My}{(p-۱)!}$ که y مولد گروه پادزنجیر $C^{۲n+۲p+۱}(X, \mathbb{Z})$ است، قابل نمایش است. از طرف دیگر برای x در $\mathbb{P}^p$ داریم:

$$P_p^{۱}(x) = \bar{x}^p$$

که $\bar{x}$ نمایش x به پیمانه p است. پس $\delta_p P_p^{۱}(u)$ توسط My قابل نمایش است. چون $(p - ۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$ در نتیجه $\lambda = -۱$ و این اثبات ۲.۸ را کامل می‌کند.

مراجع

[1] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch: Analytic cycles on complex manifolds, Topology 1 (1962) 25-45.

[2] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch: Vector bundles and homogeneous spaces, Proceedings of Symposiam of American Mathematical Society, Vol III (1960), pp 7-38.

[3] R. Bott. On theorem of Lefschetz. Mich. Math. J 6(1959) 211-216.

[4] P. Griffiths, Topics in algebraic and analytic geometry, Princeton University Press 1974.

[5] J-P, Serre, Sur la topolgie des variétés algébriques en characteristique p, Symposium Internacional de Topologia Algebraica (Mexico 1958), pp 24-53.

[6] R. Thom, Quelques properétés des varietés différentiables. Comment. Math. Helvet., 28 (1954) 17-86.

سام نریمان

دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی

`sam.nariman@gmail.com`